

Южный федеральный университет  
Донской государственный технический университет

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И БИОМЕХАНИКА  
В СОВРЕМЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

**ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ  
X ВСЕРОССИЙСКОЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА**

25 – 30 мая 2015 года

Ростов-на-Дону  
Издательство Южного федерального университета  
2015

ББК В2.Я 431

Редакторы: А. О. Ватульян, М. И. Карякин, А. В. Попов

Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов X Всероссийской школы-семинара, пос. Дивноморское, 25–30 мая 2015 г., Ростов-на-Дону, Издательство Южного федерального университета, 2015, 145 с.

Сборник содержит тезисы докладов, представленные на X Всероссийскую школу-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете».

Основной целью школы-семинара является обсуждение современных направлений и тенденций научных исследований в области математического моделирования деформирования новых материалов и его применений к актуальным задачам механики и биомеханики. Обсуждаются результаты моделирования тел из физически и геометрически нелинейных материалов, проблемы вычислительной механики (методы конечных и граничных элементов), идентификации параметров для материалов со сложными физико-механическими свойствами (пористость, нелинейность, неоднородность, микроструктура, пьезоэффект), задачи моделирования, функционирования и роста различных биологических тканей и систем (костная и мышечная ткани, ткань кровеносных сосудов), задачи гидродинамики кровообращения, моделирование и оптимизация имплантантов.

Важными аспектами работы школы являются изучение вопросов интеграции этих направлений с процессом современного классического естественнонаучного и инженерного образования, анализ влияния междисциплинарных исследований на формирование современного ученого, обсуждение современных методов и технологий преподавания технических и естественнонаучных дисциплин, формирование новых учебных курсов и специализаций в рамках обсуждаемых на школе-семинаре научных направлений, приобщение молодых исследователей к моделированию новых объектов.

Школа-семинар посвящена 100-летию Южного федерального университета и 85-летию Донского государственного технического университета.

*X Всероссийская конференция «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 25–30 мая 2015 г.) поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 15-01-20475*

## Программный комитет школы-семинара

Ватульян А. О., зав. кафедрой теории упругости Южного федерального университета, Ростов-на-Дону — председатель Программного комитета

Бауэр С. М., профессор Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург

Глушков Е. В., профессор Кубанского государственного университета, Краснодар

Горячева И. Г., академик РАН, зав. лабораторией Института проблем механики РАН, председатель Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, Москва

Гузев М. А., член-корреспондент РАН, директор Института прикладной математики Дальневосточного отделения РАН, Владивосток

Еремеев В. А., зав. лабораторией механики активных материалов Южного научного центра РАН, Ростов-на-Дону

Индейцев Д. А., член-корреспондент РАН, директор Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

Коссович Л. Ю., президент Саратовского государственного университета, Саратов

Любимов Г. А., зав. отделом Института механики Московского государственного университета, председатель научного совета РАН по биомеханике, Москва

Месхи Б. Ч., ректор Донского государственного технического университета, Ростов-на-Дону

Морозов Н. Ф., академик РАН, председатель научного совета РАН по механике деформируемого твёрдого тела, зав. кафедрой теории упругости Санкт-Петербургского государственного университета, Санкт-Петербург

Наседкин А. В., зав. кафедрой математического моделирования ЮФУ, Ростов-на-Дону

Няшин Ю. И., зав. кафедрой теоретической механики Пермского национального исследовательского политехнического университета, главный редактор Российского журнала биомеханики, Пермь

Соловьев А. Н., зав. кафедрой теоретической и прикладной механики Донского государственного технического университета, Ростов-на-Дону

Устинов Ю. А., профессор кафедры теории упругости Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

Цатурян А. К., ведущий научный сотрудник Института механики Московского государственного университета, член Международного совета по биомеханике, Москва

Шевцов С. Н., зав. лабораторией машиностроения и высоких технологий Южного научного центра РАН, Ростов-на-Дону

Штейн А. А., ведущий научный сотрудник Института механики Московского государственного университета, Москва

## Организационный комитет школы-семинара

Карякин М. И., директор Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета (ИММиКН ЮФУ) — председатель Оргкомитета

Колесников А. М., доцент кафедры теории упругости ИММиКН ЮФУ

Надолин К. А., зам. директора ИММиКН ЮФУ

Попов А. В., зав. лабораторией механики твёрдого тела ИММиКН ЮФУ

Цыбенкова О. А., зам. директора ИММиКН ЮФУ

Шубчинская Н. Ю., ассистент кафедры теории упругости ИММиКН ЮФУ

## Модели деформируемого тела в задачах биомеханики глаза

**Бауэр С. М.***Санкт-Петербургский государственный университет*

s\_bauer@mail.ru

Быстрое развитие офтальмологии и потребности клинической практики привели к пониманию того, что в решении целого ряда офтальмологических проблем целесообразно использовать механику. С точки зрения механики глазное яблоко можно рассматривать как напряженную упругую замкнутую оболочку (корнеосклеральную капсулу глаза), заполненную несжимаемой жидкостью — камерной влагой и стекловидным телом. К биомеханическим конструкциям, анатомически и физиологически связанным с корнеосклеральной оболочкой глаза, относятся аккомодационный аппарат, включающий хрусталик и его мышечно-связочный комплекс, дренажная система глаза, сосудистая оболочка, а также экстраокулярные мышцы.

Проблемы возникновения и лечения глаукоматозной атрофии зрительного нерва, аккомодации, связанные с деформированием составных элементов глаза, остаются важными проблемами хирургии. В последнее время в связи с развитием рефракционной хирургии, меняющей параметры роговицы глаза, особое значение приобрели вопросы стандартизации измерения внутриглазного давления (ВГД), изучение влияния различных параметров глазного яблока на показатели тонометров. В докладе представлен ряд математических моделей, построенных в сотрудничестве с врачами — офтальмологами. Описаны модели расчета напряженно-деформированного состояния оболочки глаза после операций по коррекции зрения. Обсуждаются математические модели, позволяющие оценить влияние отклонений формы роговицы и склеры от сферической формы на показатели ВГД, оценить влияние толщины роговицы на показатели внутриглазного давления.

Одним из современных способов лечения некоторых глазных заболеваний является инъекция — введение небольшой (до 0,2 мл) дозы лечебного препарата в стекловидное тело. За счет кратковременного увеличения внутреннего объема глазного яблока при введении инъекций в первый момент происходит резкое увеличение ВГД, что может привести к нарушению кровообращения на сетчатке и в диске зрительного нерва, поэтому важно в каждом конкретном случае оценить возможный уровень изменения ВГД в результате инъекции и риск для отдельного пациента, а также, возможно, на основе этих данных рекомендовать уменьшенную дозу препарата для отдельных больных. С точки зрения механики это задача определения изменения внутреннего давления в оболочке, заполненной несжимаемой жидкостью, при введении дополнительного объема несжимаемой жидкости. Обсуждаются модели, позволяющие описать изменение внутриглазного давления после интрасклеральных инъекций (введения дополнительного объема несжимаемой жидкости).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 15-01-06311А.

## Континуально-кинетическая модель сердечной мышцы

**Цатурян А. К.**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*  
andrey.tsaturyan@gmail.com

Основная особенность мышечной ткани состоит в ее способности к развитию активных напряжений и деформаций за счет механо-химических реакций. Макроскопические напряжения создают миозиновые молекулярные моторы, организованные в надмолекулярные образования — толстые нити. Миозин взаимодействует с другим белком — актином, образующим тонкие нити. Толстые и тонкие нити организованы в упорядоченные микроскопические структуры — саркомеры. В традиционных кинетических моделях актин-миозинового взаимодействия, начиная с пионерской работы А. Ф. Хукли (1957), кинетические константы полагают функциями микродеформации конкретного миозинового мотора. При этом связь между напряжениями и деформациями определяется уравнениями в частных производных, и решение сколько-нибудь сложных задач оказывается практически невозможным. Еще одна проблема построения моделей сердечной мышцы состоит в том, что актин-миозиновое взаимодействие регулируется изменением концентрации ионов  $\text{Ca}^{2+}$  в клетке.

Нами (Сёмин, Цатурян, Биофизика, 2012) была предложена простая кинетическая модель мышечного сокращения, в которой кинетические константы зависят только от среднего по ансамблю перемещения миозиновых моторов и определяющие соотношения представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта модель была позднее дополнена моделью кинетики ионов кальция, характерной для миокардиальной ткани (Сёмин, Биофизика, 2014) и хорошо описывает широкий класс экспериментов с образцами скелетной и сердечной мышцы. Для описания связи между тензорами напряжения и деформации предложена модель, в которой сердечная мышца представляется как несжимаемая, трансверсально изотропная сплошная среда (Сёмин, Цатурян, 2015, Доклады РАН в печати). Тензор напряжений содержит изотропную упругую составляющую, а также пассивный упругий компонент и активное напряжение, которые пропорциональны в замороженному в среду тензору, характеризующему анизотропию среды. Модель замыкается кинетическими уравнениями, описывающими среднюю микродеформацию миозиновых моторов, долю тех из них, которые участвуют во взаимодействии с актином, а также концентрации ионов  $\text{Ca}^{2+}$  и их комплексов с регуляторными белками в различных структурах клеток миокарда.

Эта модель была применена для численного расчёта работы левого желудочка сердца, моделируемого толстостенным цилиндром, в котором ориентация мышечных волокон, определяющая ось бесконечного порядка трансверсальной изотропии, меняет свою ориентацию при перемещении от внутренних к внешним слоям стенки желудочка. Модель замыкается простыми соотношениями, моделирующими течение крови в большом круге кровообращения. Показано, что даже такая простая модель хорошо воспроизводит многие характеристики работы левого желудочка, в том числе его осевую и радиальную деформацию, скручивание, зависимость ударного объема желудочка от давления и др.

Работа поддержана РФФИ КОМФИ 13-04-40100-Н и РНФ 14-35-00005.

## Двумерные спиновые (магнитные) волны в составном ферромагнитном полупространстве

Агаян К. Л., Атоян Л. А.

*Ереван, Институт механики НАН Армении*

karo.aghayan@gmail.com

В магнитоупорядоченных средах, в ферромагнитах и ферритах, находящихся в постоянном магнитном поле, могут распространяться волны особой структуры, называемые спиновыми волнами. При учете упругой деформации среды эти волны называются упруго-спиновыми. Вместе с вопросами существования и распространения этих волн особое внимание уделяется также исследованию поверхностных (неоднородных) спиновых и упруго-спиновых волн. Здесь рассматриваются задачи о распространении двумерных спиновых волн в составном недеформированном ферромагнитном полупространстве, типа конструкции Лява, находящемся в постоянном магнитном поле. Предполагается, что на плоскостях раздела материалов могут присутствовать полубесконечные магнитные экран-стенки.

Пусть пространство, отнесенное к декартовой системе координат  $Oxyz$ , заполнено ферромагнитными кристаллами, занимающими полупространство  $y > 0$  (область  $\Omega_1$ ) и слой  $-H < y < 0$  (область  $\Omega_2$ ), и диэлектрическим (вакуум) полупространством  $y < -H$  (область  $\Omega_3$ ). Полупространство ( $\Omega_1$ ) и слой, имеющие различные ферромагнитные характеристики, контактируют по плоскости  $y = 0$ . Оси легкого намагничивания ферромагнитных кристаллов параллельны и направлены по оси  $Oz$ . Предполагается, что кристаллы находятся во внешнем магнитном поле  $\vec{H}_0$ , а объемная плотность намагниченности  $\vec{M}_{0j} = \rho_j \vec{\mu}_{0j}$  ( $\rho_j$  — плотность кристалла,  $\vec{\mu}_{0j}$  — плотность намагниченности, отнесенной к единице массы) параллельна магнитному полю  $\vec{H}_0$ , причем, они направлены по оси  $Oz$ . Предполагается также, что кристаллы не деформируются, а возмущения в них характеризуются векторами  $\vec{\mu}_j \{ \mu_j(x, y, t); \nu_j(x, y, t) \}$  магнитного момента (спина) и магнитостатическим потенциалом  $\varphi_j(x, y, t)$ , соответственно в областях  $\Omega_j$  ( $j = 1, 2$ ) ( $\vec{h} = -\text{grad}\varphi$  — возмущение напряженности магнитного поля).

В описанном выше составном ферромагнитном полупространстве исследуется распределение магнитного волнового поля, при предположении, что в области  $\Omega_2$  распространяются заданные возбуждающие волны

$$(\mu_{02}, \nu_{02}, \varphi_{02}) = (A_\mu, A_\nu, A_\varphi) e^{\pm py + ipx - i\omega t}$$

где  $A_\mu, A_\nu, A_\varphi$  — амплитуды падающих волн,  $p$  — волновое число,  $\omega$  — частота колебаний,  $t$  — время.

При этих предположениях рассматриваются задачи, когда плоскости  $y = 0$  или  $y = -H$  покрыты полубесконечными или бесконечными магнитными экранами. Проблема сводится к задаче типа Римана аналитических функций на действительной оси, решение которой построено методом факторизации, найдены распределения волновых полей в каждом участке составного пространства.

Показано, что наличие магнитных экранов существенно меняет распределение волновых полей в ферромагнитах — появляются новые спиновые неоднородные волны.

## Качественные особенности контактного взаимодействия штампов с жесткими и мягкими покрытиями

**Айзикович С. М., Волков С. С., Васильев А. С., Литвиненко А. Н.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
saizikovich@gmail.com

Построено численно-аналитическое решение плоской контактной задачи теории упругости о взаимодействии цилиндрического штампа с упругой полосой, лежащей на однородной полуплоскости (подложке). Для построения решения этой задачи использован двусторонне-асимптотический метод решения парных интегральных уравнений, который основывается на том, что построенная численно для произвольного закона изменения упругих модулей полосы трансформанта ядра аппроксимируется выражениями специального вида. Построенное решение является асимптотически точным как для больших, так и для малых значений характерного геометрического параметра задачи (отношение толщины полосы к полуширине зоны контакта) (Айзикович С. М. ПММ. 1990. Т. 54. С. 872–877). Результаты численного исследования показали эффективность метода также в зоне средних значений геометрического параметра задачи (Vasiliev A. и др. ZAMM. 2014. Т. 94, вып. 9, С. 705–712.)

В качестве примера рассматривается случай внедрения штампа в мягкое и жесткое упругое однородное покрытие. Здесь под мягкостью (жесткостью) понимается существенное отличие упругих модулей покрытия от подложки в зоне их сопряжения. Рассмотрены случаи такого отличия до 100 раз. Показаны качественные особенности распределения контактных напряжений для мягких и жестких покрытий малой толщины, особенно ярко выраженные вблизи края зоны контакта. Так, для жестких покрытий наблюдается зона относительного увеличения контактных напряжений по сравнению с однородными материалами, которая уменьшается и сдвигается к краю зоны контакта по мере уменьшения толщины покрытия. Для мягких покрытий наблюдается относительное увеличение напряжений в центре штампа и их относительное уменьшение при приближении к краю зоны контакта по мере уменьшения толщины покрытия. Полученное решение также позволяет получить распределение контактных напряжений для мягких (жестких) покрытий, у которых упругие модули меняются с глубиной по достаточно произвольному закону (линейные, экспоненциальные, тригонометрические и др. законы).

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 13-08-01435-а, 14-07-00705-а, 15-07-05820-а. Айзикович С. М. благодарит Министерство образования и науки за финансовую поддержку в рамках выполнения работы «Организация проведения научных исследований» Государственного задания. Волков С. С. поддержан стипендией Президента РФ № СП-3708.2015.1.

## Напряженное состояние кусочно-однородного клина с межфазовым абсолютно жестким включением

**Акопян В. Н.**

*Ереван, Институт механики НАН Армении*

vhakobyan@sci.am

Рассмотрено плоское деформированное состояние кусочно-однородного упругого клина, состоящего из двух разнородных клиньев произвольных углов раствора  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно, когда на линии стыка этих клиньев имеется абсолютно жесткое тонкое включение конечной длины, не выходящее на вершину клина. Методом разрывных решений уравнений теории упругости получено ключевое уравнение поставленной задачи в виде одного сингулярного интегрального уравнения второго рода относительно комплексной комбинации скачков нормальных и тангенциальных контактных напряжений, действующих на берегах включения. Решение последнего при помощи аппарата ортогональных многочленов Якоби сведено к решению квазивполне регулярной бесконечной системе алгебраических уравнений. Получены простые формулы для определения основных механических характеристик поставленной задачи, каковыми являются контактные напряжения, действующие на берегах включения и коэффициенты их концентрации в концевых точках включения, а также угол поворота включения.

В одном частном случае, когда  $\alpha = \beta = \pi$  и упругие характеристики клиньев одинаковые, т.е. в случае однородной плоскости с полубесконечной трещиной и конечным абсолютно жестким тонким включением, выходящим на вершину трещины, построено точное решение задачи. Показано, что в этом случае нормальные контактные напряжения, действующие на берега включения ограничены, в то время как тангенциальные контактные напряжения в концевых точках включения стремятся к бесконечности.

Произведен численный анализ задачи в частном случае, когда  $\alpha = \beta = \pi$ , т.е. в случае, когда кусочно-однородная плоскость, состоящая из двух разнородных упругих полуплоскостей, на линии их соединения содержит полубесконечную трещину и абсолютно жесткое тонкое включение конечной длины, не выходящее на вершину трещины. При этом считается, что плоскость деформируется под воздействием равномерно распределенных одинаковых нормальных нагрузок, приложенных к симметричным участкам определенной длины противоположных берегов полубесконечной трещины. При предположении равенства коэффициентов Пуассона разнородных полуплоскостей выявлены закономерности изменения вышеуказанных основных механических характеристик в зависимости от соотношения модулей упругости и от расстояний включения и участков приложения нагрузки от вершины трещины.

Показано, что существует определенная зависимость между расстояниями центров включения и участка приложения нагрузки от вершины полубесконечной трещины, когда независимо от соотношения модулей упругости разнородных полуплоскостей угол поворота включения равен нулю.

## Запрещенные зоны и зоны низкого прохождения в слоистых фононных кристаллах

**Александров А. А., Фоменко С. И.**

*Краснодар, Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет*

bright\_sky@list.ru

Одно из основных свойств периодических упругих композитов, или фононных кристаллов — это полное отражение энергии в определённых частотных диапазонах, часто называемых запрещёнными зонами. Если спектр падающего на периодическую структуру волнового пакета полностью расположен в запрещённой зоне, то прохождение волн через фононный кристалл фактически невозможно. Практическое использование включает в себя упругую или акустическую фокусировку, минимизацию вибрации, звуковую коллимацию, акустическую маскировку и др. Уже созданы устройства на фононных кристаллах, например, сенсор, работающий в гигагерцовом диапазоне, и акустический сенсор для определения свойств бензина.

Настоящая работа является развитием исследований волновых явлений в слоистых периодических композитах и посвящена изучению распространения плоских  $P$ - и  $SV$ -волн в пьезоупругих функционально-градиентных фононных кристаллах. Моделирование фононных кристаллов, включающее в себя расчёт запрещённых зон, волновых полей, а также коэффициентов прохождения и отражения энергии, является актуальной задачей. Постановка задачи формулируется в терминах линейной теории для пьезоупругих материалов. Рассматриваемая структура состоит из  $N$  одинаковых ячеек, каждая представляет собой пакет из  $M$  слоёв, которые в общем случае являются пьезоупругими. Строится математическая и компьютерная модель для наиболее общего класса анизотропии с максимально возможным числом констант. Фононный кристалл расположен между двумя упругими изотропными полупространствами, в качестве падающего волнового поля рассматривается плоская  $P$ - или  $S$ - волна. Для расчёта волновых полей используется метод матриц переноса, который доказал свою эффективность при моделировании слоистых периодических структур. Матрица переноса всей структуры находится как степень матрицы переноса одной ячейки. Для большого количества ячеек используется спектральное представление матрицы переноса, что позволяет повысить численную устойчивость метода, а также провести классификацию запрещённых зон. На основе анализа коэффициента прохождения и фактора локализации исследуются влияние изменения упругих свойств, толщин слоёв, ориентации волокон, угла падающей волны на запрещённые зоны. Изучаются вопросы формирования зон низкого прохождения, в которые вырождаются некоторые запрещённые зоны при малых углах падения плоской волны. В случае разрешённой зоны малого прохождения основная часть волнового пакета отражается от фононного кристалла, но имеются также волны малой амплитуды, проходящие через слоистую структуру.

Работа выполнена совместно с Голубом М. В. при частичной поддержке Минобрнауки РФ (проект №14.Z56.15.7154МК), РФФИ и администрации Краснодарского края (проект № 13-01-96520).

## Заполняющие объем бинарные деревья как оптимальные транспортные русла

**Балабанов В. А., Кизилова Н. Н.**

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина*

lekarsenten@gmail.com

Артериальные системы внутренних органов представляют собой ветвящиеся бинарные деревья, содержащие незначительное число трифуркаций. Длины и диаметры артерий последовательных порядков ветвления монотонно уменьшаются вплоть до капиллярного уровня, где течение можно считать квазистационарным с  $Re \ll 1$ . Сосудистые русла не содержат самопересечений и обеспечивают равномерную доставку крови к распределенной по объему органа системе клеток, потребляющих доставляемый кислород и питательные вещества. Механизмы генерации в ходе роста и развития организма ветвящихся деревьев, плотно заполняющих объем органа, остаются до конца не исследованными. Вполне возможно, таковыми являются простые физические соотношения, определяющие баланс доставки и потребления вещества, а также зависимость скорости роста от полученных веществ. Имеющиеся в литературе результаты детальных измерений диаметров и длин сегментов артерий внутриорганных русел демонстрируют наличие зависимостей между диаметрами артерий в бифуркациях, длинами и диаметрами сегментов, диаметрами и углами ветвления в бифуркациях. При этом возникает вопрос о влиянии пространственной геометрии сосудистого дерева на параметры стационарного течения крови от питающей артерии к капиллярам, на распространение и отражение волн давления. В работе представлены результаты компьютерного моделирования на основе нового алгоритма генерации заполняющих заданное пространство бинарных деревьев без самопересечений. Численное моделирование проведено с использованием параметров нерегулярных бинарных деревьев, длины и диаметры элементов которых соответствуют изменениям на сосудистых препаратах.

Основой алгоритма является представление дерева как совокупности бифуркаций трех трубок, лежащих в одной плоскости, и последующему повороту плоскости, содержащей дочернюю трубку, на некоторый угол относительно плоскости, которой принадлежит материнская трубка. После каждого поворота проводится проверка отсутствия самопересечений. На полученном дереве были проведены расчеты стационарной и волновой проводимости дерева. На стационарную компоненту накладывались возмущения в виде волн малой амплитуды. В местах бифуркаций трубок принималось условие непрерывности объемных расходов и давлений. Получены выражения для распределения давлений и скоростей в трубках, напряжения трения на стенке, а также параметра, описывающего равномерность распределения жидкости по объему. Было показано, что нерегулярные модели, соответствующие артериальным руслам, обеспечивают наиболее равномерную доставку жидкости при значительно меньшей вязкой диссипации. Углы ветвлений в таких моделях довольно близки к тем, какие были выявлены в ходе измерений на сосудистых препаратах. Рассчитаны параметры оптимального волновода в виде заполняющего пространство бинарного дерева, в котором отражение волн на бифуркациях отсутствует.

## Разработка программного модуля CAE пакета ACELAN на основе SPH метода

**Бирюков С. В., Соловьева А. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
sbiryukov@sfedu.ru

Целью данной работы является исследование возможностей и особенностей вычислительного метода SPH, для его дальнейшего применения в пакете ACELAN, а также популяризация семейства бессеточных методов в русскоязычной научной среде. SPH (smoothed particle hydrodynamics) — вычислительный бессеточный метод, как видно из названия, изначально разработан для моделирования газо-/гидро-динамических процессов. Впервые был применен для моделирования звездной эволюции. В данный момент может быть найдено достаточно большое количество модификаций метода, основанных на первоначальной постановке, тем не менее, в России широкого распространения он не получил. С развитием механики сплошных сред значительно расширился и круг моделируемых процессов. В настоящем существуют работы, посвященные не только гидродинамике и газодинамике, но и моделирующие поведение твердых материалов, переход материала из состояния в состояние, в некоторой форме применяется и для моделирования динамики роя, либо динамики толпы. В наибольшей степени данный вычислительный метод популярен, в первую очередь, ввиду точности визуализации сложных процессов. Тем не менее, в настоящем существует небольшое количество работ, способных описать основные моменты реализации, как и объяснить отличия от наиболее используемых на данный момент методов. Таких отличий может быть найдено большое количество, как в теоретической части подхода, так в его реализации. Так как метод был разработан и использовался для описания процессов в жидкостях и газах, то приводится разбор ключевых моментов реализации алгоритма для твердого тела с использованием упругой и пластично-упругой модели механики сплошной среды, ввиду слабой его освещенности в литературе.

На данный момент реализована базовая часть программы для работы с твердым телом в терминах упругого материала механики сплошной среды. Для разработки был выбран язык программирования C# в связке с фреймворком XNA, позволяющий начать непосредственно разработку вычислительной части без траты значительного времени на реализацию интерфейса. Также был реализован временный интерфейс, использующийся для отладки программы и проведены тестовые численные эксперименты. Особенность метода — итерационное вычисление всех значений частицы, что является крайне ресурсоёмкой задачей, потому на самой ранней стадии разработки было решено использовать класс “.Parallel” и строить архитектуру программы в соответствии с необходимостью в дальнейшем использовать процедуры распараллеливания.

## Задачи о деформировании пластин переменной жесткости и их приложения

**Богачев И. В.<sup>1</sup>, Ватульян А. О.<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

<sup>2</sup>*Владикавказ, Южный математический институт ВЦ РАН и РСО-А*  
vatulyan@math.rsu.ru

Задачи о деформировании пластин переменной жесткости в последние годы весьма часто используются при моделировании различных объектов. Это и фрагменты некоторых технических систем, где использование модели с постоянной жесткостью может привести к большой погрешности, элементы биологических систем, например, ткани глаза. Задачи для таких объектов могут быть разбиты на два класса — исследование деформирования при сложных условиях нагружения и задачи идентификации жесткости при известном деформировании.

Одним из элементов структур глаза является фиброзная оболочка, большую часть которой составляет склера. На задней части глазного яблока склера представляет собой несплошную среду, которая имеет множество отверстий, через которые проходят пучки зрительного нерва. Эта часть склеры (решетчатая пластина) является существенно неоднородной биологической структурой. Она имеет переменную толщину, слоистую структуру, ослаблена большим числом отверстий (от 200 до 700), которые занимают около  $2/3$  площади всей пластины, постоянно испытывает нагрузки и деформации, являясь структурой раздела.

Потеря эластичности, ущемление зрительного нерва приводит к распространенному заболеванию — глаукоме в связи с ухудшением кровообращения и атрофией волокон нерва. Последние исследования показали, что сдвиговые межслойные деформации в решетчатой пластинке могут вызывать предпосылки к глаукоме. Диагностика развития глаукомы, особенно на ранних стадиях, возможна на основе анализа изменения эффективной жесткости решетчатой пластины при динамическом наблюдении.

Отметим достаточное количество работ в области исследования деформирования пластин переменной жесткости, выполненных в рамках моделей Кирхгофа и Амбарцумяна, учитывающей сдвиговые напряжения, причем решение краевых задач для операторов с переменными коэффициентами строится, как правило, на основе конечноэлементных расчетов.

В настоящей работе рассмотрены колебания круговой в плане защемленной по контуру упругой пластины переменной жесткости. Решение прямой задачи осуществлялось методом Галеркина. Обратная задача заключалась в определении переменной жесткости пластины по измеренному в некотором частотном диапазоне смещению в точке. Эта задача является существенно нелинейной и для ее решения был построен вычислительный итерационный алгоритм, сочетающий решение ряда прямых задач и интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с гладким ядром относительно поправки к искомой функции жесткости. Был проведен ряд вычислительных экспериментов по восстановлению функций разного характера, показавших эффективность предложенного подхода и позволяющих осуществлять оценку изменения жесткости.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России № 9.665.2014/К

## Идентификация QRS-комплекса кардиосигнала методом эмпирической модовой декомпозиции

**Богачева М. О.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
akimenko-85@mail.ru

Традиционные методы анализа данных предназначены, как правило, для линейных и стационарных рядов и систем, тогда как реальные данные обычно являются нелинейными и нестационарными. Нестационарность временных рядов, в частности биологических сигналов, становится существенным препятствием для их анализа. Так при исследовании кардиосигнала отчетливые нарушения в его структуре выявляются невооруженным глазом. Но возможен целый ряд отклонений и пограничных состояний, которые не проявляются в виде контрастных признаков. При анализе кардиосигнала большое внимание уделяется исследованию QRS-комплекса, характеризующего сокращение желудочков сердца. Его продолжительность, амплитуда и морфология позволяют диагностировать различные виды сердечно-сосудистых заболеваний на ранней стадии: аритмию, гипертрофию желудочков, инфаркт миокарда и др.

В настоящее время одним из основных подходов для идентификации характеристик сигнала является его разложение на эмпирические моды (Empirical Mode Decomposition — EMD). Модовая декомпозиция сигналов основывается на предположении, что любые данные состоят из различных внутренних колебаний. По сравнению с классическим анализом Фурье и вейвлет-разложением, эмпирическая модовая декомпозиция характеризуется высокой степенью адаптации к обработке различных нестационарных сигналов. С помощью эмпирической модовой декомпозиции любой сигнал может быть разложен на конечное число внутренних эмпирических мод, каждая из которых содержит информацию о начальном сигнале.

В настоящей работе с помощью эмпирической модовой декомпозиции были проанализированы 4 вида кардиосигналов из базы данных биомедицинских сигналов [www.physionet.org](http://www.physionet.org), записанных во втором стандартном отведении: кардиосигнал здорового человека, пациента с инфарктом миокарда, кардиосигнал в случае гипертрофии левого желудочка сердца и кардиосигнал пациента с блокадой ножки пучка Гиса. Все расчеты были реализованы в среде Maple. В данной работе было определено оптимальное количество итераций для отсеивания модовых функций и получено распределение количества эмпирических мод для электрокардиографических сигналов. Анализ QRS-комплекса включал в себя разложение исходного кардиосигнала на внутренние модовые функции с последующим нелинейным преобразованием и применением фильтра Баттерворта для получения точного максимального значения каждого QRS-комплекса.

Теория и эксперимент в дифракции коротких волн  
на изолированных дефектах и их скоплениях в сплошных средах

**Боев Н. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

boyev@math.rsu.ru

Исследуется однократное и многократное отражение высокочастотных упругих волн от скопления дефектов в виде полостей в упругой среде, а также распространение упругих волн вдоль свободной граничной поверхности упругого тела. Перемещения в продольной и поперечной волнах, отраженных от препятствий, получены на основе модификации физической теории дифракции Кирхгофа с использованием интегральных представлений Соммильяны. Главный член асимптотики дифракционного интеграла получен методом многомерной стационарной фазы. Он соответствует геометрической теории дифракции (ГТД) и определяется коэффициентами отражения и трансформации упругих волн и определителем ленточной матрицы Гессе порядка  $2N$  (где  $N$  — число отражений), элементы которой зависят от механических и геометрических параметров задачи.

На примере детерминированной модели распределения дефектов проведен сравнительный анализ результатов теоретических расчетов амплитуд перемещений, полученных на основе явных выражений и экспериментальных данных однократного и многократного отражения ультразвуковой продольной волны от системы трех соосных цилиндрических полостей, находящихся в стальном образце конечных размеров.

Разработан аналитический алгоритм решения обратной задачи по реконструкции выпуклых оболочек граничных поверхностей изолированных дефектов по измеренному времени прихода отраженных импульсов в обратном направлении. Сначала по известному времени прихода восстанавливаются в точках зеркального отражения касательные плоскости к поверхности дефекта, а затем строится огибающая поверхность (выпуклая оболочка дефекта) двупараметрического семейства касательных плоскостей и выписываются декартовы координаты точек поверхности. При практическом сканировании имеется дискретный набор направлений, по которым производятся измерения с некоторой погрешностью. Поскольку в выражении координат точек граничной поверхности входят производные опорной функции, то задача вычисления координат является некорректной. Таким образом, прямое использование полученных формул на практике невозможно, во-первых, из-за неточности в определении времени прихода волны и, во-вторых, из-за наличия конечного шага по угловой координате, не всегда достаточно малого для обеспечения корректного вычисления производных опорной функции. Даже для выпуклых частей поверхности дефекта опорная функция будет только кусочно-гладкой и используемые при построении выпуклой оболочки её первые производные могут отличаться от истинных не только по величине, но и по знаку. С учетом этих особенностей в двумерном случае построен алгоритм, позволяющий аппроксимировать опорную функцию некоторой гладкой функцией, для которой значения функции и её производных близки к реально полученным.

## Об одном подходе к повышению информативности поверхностного волнового поля

**Бочарова О. В.<sup>1</sup>, Анджинович И. Е.<sup>2</sup>, Седов А. В.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*

<sup>2</sup>*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*olga\_rostov1983@mail.ru*

Проблема разработки методов неразрушающего контроля состояния и прочностного ресурса узлов и деталей инженерных конструкций ответственного назначения является ключевой для повышения надежности их эксплуатации и предотвращения аварийных ситуаций. Современное развитие технологий производства новых материалов и повышенные требования к эксплуатационным характеристикам деталей конструкций, выполненных из этих материалов и работающих в сложных условиях, приводят к необходимости создания эффективных методов постоянного мониторинга состояния объекта.

В ходе настоящего исследования был создан многофункциональный измерительный комплекс, позволяющий проводить исследования, сопоставлять сигналы и строить спектральные характеристики датчиками различного типа, а также создана экспериментальная установка, позволяющая в лабораторных условиях оценивать изменение поверхностного волнового поля на образцах различных технологических материалов. Проведены испытания сегнетоэлектрических пленочных датчиков деформаций, которые показали многогранность их применения в различных методах акустического контроля состояния поверхностей.

Параллельно проведен вычислительный эксперимент, основанный на использовании метода конечных элементов. Исследовались особенности динамического процесса на поверхности прямоугольного параллелепипеда, в котором прорезаны сквозные поперечные цилиндрические полости. Поверхностные колебания в образце возбуждались импульсным воздействием. Диаметр полости и глубина ее залегания варьировались. Для расчета волнового поля на поверхности параллелепипеда, ослабленного наличием полости, был применен пакет ANSYS с использованием командного языка APDL.

При решении задач диагностики дефектов был применен метод распознавания образов. При использовании этого метода, распознаванию типа дефекта соответствует распознавание типа функции отклика. При этом существует устойчивая и однозначная взаимосвязь между видом функции отклика и параметрами дефекта конструкции. Проведена серия вычислительных экспериментов. Результаты экспериментов показали, что имеет место четкое распределение образов в пространстве распознавания в зависимости от дефекта образца.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Российского научного фонда (14-19-01676), Российского фонда фундаментальных исследований (14-08-31758 мол\_а)

## Об одном подходе к обучению программированию студентов-механиков

**Брагилевский В. Н.***Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

bravit@sfedu.ru

Обучение программированию традиционно проводится в соответствии с двумя подходами, языково-ориентированным и проблемно-ориентированным. В первом случае выбирается язык программирования и предметом изучения становятся его синтаксические особенности, возможности стандартной библиотеки, технологические аспекты процесса разработки. Во втором случае во главу угла ставятся задачи, так или иначе связанные с основным видом деятельности обучающихся, а используемые для решения задач инструменты подбираются в соответствии с принципом максимального удобства. Если первый подход обычно используется для подготовки будущих программистов, то второй подходит для обучения специалистов в иных областях, для которых программирование является хотя и необходимым, но все же вспомогательным видом деятельности.

Таким образом, проектирование курса программирования для студентов-механиков должно начинаться с выявления задач, которые ставятся перед ними в их профессиональной деятельности. При этом должны учитываться знания и навыки, имеющиеся у студентов к моменту, когда начинается обучение программированию, а также формируемые в параллельных ему курсах. В качестве важных источников для курсообразующих задач могут служить общие проблемы вычислительной математики и механики, организация эффективных численных расчетов (распараллеливание и иные приемы ускорения вычислений, например, с использованием видеокарт), задачи оформления результатов научных исследований (в частности, визуализация данных).

Для такого курса могут оказаться полезными следующие инструменты: язык программирования Python, системы компьютерной алгебры Sage (на базе Python), Matlab и Octave, издательская система L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X с пакетами программирования и визуализации данных, совмещаемыми с программами graphviz и gnuplot. Богатый набор инструментов призван продемонстрировать студентам применимость получаемых программистских навыков для решения широкого класса задач. Заметим, что все это вполне может быть использовано в рамках первого курса программирования, такие базовые понятия как переменные, ветвление, циклы, подпрограммы и модульность возникают при таком подходе вполне естественно и легко усваиваются. При этом они подаются достаточно общо, без привязки к конкретному языку программирования, что способствует более легкому освоению других языков.

## Моделирование взаимодействия зонда атомно-силового микроскопа с поверхностью тонкой полупроводниковой пленки

**Бычков А. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет  
az710@yandex.ru*

Атомно-силовая микроскопия (АСМ) — современный метод исследования морфологии и свойств поверхности твердых тел, обладающий высоким пространственным разрешением. Исследования в области физики поверхности и тонкопленочных технологий активно используют методы АСМ. Успехи в области АСМ способствуют развитию новых методов в технологии создания структур с нанометровыми масштабами. С помощью АСМ можно получать информацию не только о геометрии рельефа на наноуровне, но и о локальных физико-механических свойствах материала, которые могут существенно отличаться от его макросвойств. Имеются два основных режима работы АСМ: бесконтактный и контактный. Бесконтактный режим работы дает информацию о рельефе образца, в то время как контактный режим позволяет оценить силу взаимодействия зонда и образца.

Нелинейность в силе взаимодействия вершины зонда АСМ и исследуемого образца приводят к появлению высоких гармоник в движении микроконсоли, содержащих полезную информацию о свойствах образца. Однако, амплитуды высокочастотных компонент для консолей с высокой добротностью на 2–3 порядка меньше основной компоненты. Амплитуды высших гармоник могут быть усилены посредством одновременного возбуждения собственных мод микроконсоли, в частности, методом бимодальной модуляции. Данный метод использует две движущие силы для того, чтобы возбудить колебания консоли. Возбуждающие частоты настроены таким образом, чтобы совместить их с двумя собственными частотами, соответствующими изгибным собственным модам. Выходной сигнал первой моды используется для изображения топографии поверхности, в то время как выходной сигнал второй моды используется для измерения механических свойств поверхности. Другой метод решения задачи об усилении 2 собственной моды микроконсоли АСМ использует явление внутреннего резонанса. Метод предполагает одночастотное возбуждение микроконсоли АСМ, форма которой соответствует кратности частоты второй собственной моды относительно первой.

Исследованы модели взаимодействия зонда атомно-силового микроскопа, включающие действие бимодальной частотной модуляции, и выбор микроконсоли, соответствующей условиям внутреннего резонанса. Расчет учитывает наличие когерентных (бездислокационных) островков на поверхности пленки, образующихся в режиме роста Странского—Крастанова, а также образование волнистости на свободной поверхности пленки при гетероэпитаксии (нестабильность Азаро—Тиллера—Гринфельда). Релаксация накопленной в процессе роста пленки упругой энергии происходит за счет роста островков и образования волнистости на свободной поверхности пленки. Построены трехмерные модели островков и модель полупроводниковой пленки с волнистой свободной поверхностью.

## Колебания неоднородной балки с упругой опорой

**Васильев Л. В.***Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
leninid@mail.ru

Оценка упругости опор конструкции важна для различных технических приложений, в частности, для диагностики трубопроводов при наличии или отсутствии жидкости, в биомеханике для оценки характеристик жесткости элементов биомеханической системы кость—фиксатор.

К настоящему времени достаточно подробно исследованы вопросы диагностики характеристик закрепления стержней на основе информации о резонансных частотах конструкции, при этом такой анализ существенно опирается на исследование частотного уравнения, которое для балок с постоянными характеристиками записывается в явном виде. Для структур переменной жесткости такой подход неприменим и требует усовершенствования.

В настоящей работе изучены изгибные колебания неоднородного стержня с жестким закреплением на одном конце и упругим опиранием, характеризуемым двумя параметрами упругости, на другом. Оценено влияние этих параметров на резонансные значения балки. В случае переменных характеристик балки для нахождения резонансных значений был использован метод пристрелки. Показано, что зависимости резонансных частот от коэффициентов упругости заделки характеризуются набором поверхностей, являющихся решениями некоторого трансцендентного уравнения. Установлено, что частоты возрастают при увеличении параметров упругости. Так же диапазон полученных частот лежит между частотами, характерными для свободного конца и случая жесткого закрепления. Исследованы сечения этих поверхностей плоскостями, параллельными координатным. Произведена классификация сечений (фрагменты гипербол и монотонно возрастающих функций). Отмечено, что кривизна участков кривых, полученных в рассмотренных сечениях, уменьшается со следующей резонансной частотой. Для однородной балки получено явное представление этого уравнения. Получено асимптотическое представление резонансных значений для случая однородной балки при малых и больших значениях параметров упругости.

Рассмотрена обратная задача о реконструкции параметров упругого опирания при известных резонансных значениях. В случае двух известных резонансных значений представлены способы нахождения параметров на основе асимптотического и аналитического подхода, приведены результаты данных подходов. Проведена оценка точности и применимости в расчетах представленных методов.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю проф. Ватульяну А. О.

## Статический конечно-элементный анализ прочностных характеристик модельной биомеханической системы интрамедуллярного остеосинтеза

**Васина А. К.<sup>1</sup>, Мыцыков Р. Ю.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

<sup>2</sup>*Ростовский государственный медицинский университет*  
turygina.a@yandex.ru

Блокируемый интрамедуллярный остеосинтез — современный передовой метод оперативного лечения переломов длинных трубчатых костей. Математические и компьютерные исследования модельных биомеханических систем внутрикостного остеосинтеза позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние остеофиксаторов и костной ткани на различных этапах ее заживления и при различных типичных внешних воздействиях, а также дать прогноз по прочности всей системы.

В данной работе представлена биомеханическая модель, состоящая из имитатора кости и блокирующего интрамедуллярного стержня с фиксирующими винтами, характеризующих стандартную конструкцию при блокируемом интрамедуллярном остеосинтезе. проанализированы результаты расчетов в программном комплексе ANSYS при варьировании входных данных и внешних воздействий.

Твердотельная пространственная модель биомеханической системы создавалась из следующих основных частей:

- имитатора кости в виде двухслойного составного полого цилиндра со слоями корковой и спонгиозной костных тканей, с зоной косоугольного перелома и с коническими утолщениями в дистальной и проксимальной эпифизарных участках;
- интрамедуллярного металлического стержня, проходящего через осевую центральную часть имитатора кости;
- блокирующих винтов.

Указанные выше составные части биомеханической конструкции «кость—фиксатор» моделировались в конечно-элементном комплексе ANSYS соответствующими трехмерными конечными элементами в рамках линейной теории упругости. Построенная модель позволила задавать в общем случае анизотропные механические свойства материала имитатора кости, неоднородные свойства в месте перелома, изменять базовые характеристики модели, параметры конечно-элементного разбиения и исследовать различные статические нагрузки на имитатор кости.

С использованием разработанных программ на командном языке APDL в вычислительном конечно-элементном комплексе ANSYS были проведены расчеты напряженно-деформированного состояния (НДС) в зоне перелома при варьировании статических сжимающих и изгибных нагрузок на имитатор кости и жесткостных свойств соединительной ткани костной мозоли на различных этапах сращения перелома (гелеобразной, хрящевой, спонгиозной и нормальной костных тканей). Проведен также анализ НДС в зоне блокирующих винтов с целью исследования известных из практики возможностей их разрушения.

Авторы благодарят за помощь в работе зав. кафедрой математического моделирования Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ А. В. Наседкина.

## Исследование динамического поведения неоднородных пористоупругих структур

Ватульян А. О.<sup>1,2</sup>, Гусаков Д. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

<sup>2</sup>*Владикавказ, Южный математический институт ВЦ РАН и РСО-А*  
gusakov.dv@yandex.ru

Исследованию пористоупругих материалов посвящено большое количество как отечественных, так и зарубежных работ. Однако, стоит отметить, что рассмотрение различного вида неоднородностей в большинстве работ сводится к рассмотрению нескольких слоев однородных материалов. В нашей работе мы предлагаем более общий подход и рассматриваем неоднородные характеристики как функции координаты. Такой подход позволяет более точно моделировать различные пористоупругие объекты, такие как костная ткань или различные геологические структуры.

В представленной работе в рамках плоской деформации рассматриваются колебания пористоупругого трансверсально-изотропного слоя под действием гармонической нагрузки, приложенной к верхней границе. Считается, что все характеристики слоя являются переменными по толщине. В качестве модели пористоупругой среды использована модель М. Био. Поскольку характеристики материала считаются неоднородными, исходные уравнения будут иметь переменные коэффициенты. Следовательно в общем случае невозможно построить аналитическое решение. В этой связи процесс построения волновых полей вышеупомянутой задачи разбит на несколько отдельных этапов: введение безразмерных параметров для исходных уравнений, применение преобразования Фурье по продольной координате слоя, численное решение уравнений в образах Фурье при помощи метода стрельбы, построение оригиналов волновых полей. Особое внимание уделено построению решений уравнений в трансформантах. Для реальных материальных параметров данные уравнения характеризуются наличием малого параметра при старшей производной. Такой случай в литературе называется «жесткой» системой, решение которой требует нестандартных методик решения, например численный метод Гира. В ходе выполнения работы построены численные решения в оригиналах рассматриваемой задачи для различных законов неоднородностей характеристик слоя. Рассмотрены различные законы изменения материальных параметров с одинаковыми осредненными характеристиками. На основе анализа полученных решений выявлено влияние этих характеристик на поля перемещений и давления на верхней границе слоя.

Работа выполнена при частичной поддержке Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН №1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования» (114072870112) «Математическое моделирование неоднородных и многофазных структур».

## Колебания ортотропной оболочки вращения со сложной формой меридиана

**Ватульян К. А., Макаров С. С.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
vatulyan\_karina@mail.ru

Рассмотрены установившиеся колебания тонкостенной гофрированной упругой ортотропной оболочки вращения, причем форма срединной поверхности оболочки задавалась формулой

$$r(x) = r_0 + K \sin^2 \left( \frac{m\pi x}{L_0} \right)$$

где  $r_0$  — радиус срединной поверхности оболочки на торцах,  $K$  — амплитуда формы оболочки,  $m$  — количество периодов.

В работе были изучены два типа задач: осесимметричные задачи о крутильных и о продольно-изгибных колебаниях оболочки при жесткой заделке обоих торцов. В случае крутильных колебаний уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, описывающее колебания, было сведено к канонической системе двух уравнений первого порядка, затем методом пристрелки исследован спектр собственных частот в зависимости от геометрических параметров — амплитуды гофра и количества гофров на единицу длины. Результаты расчетов показали, что, как при увеличении амплитуды гофра, так и при увеличении количества гофров (при постоянной длине оболочки) значения собственных частот уменьшаются.

В случае продольно-изгибных колебаний система двух дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, описывающая установившиеся колебания, была сведена к канонической системе шести дифференциальных уравнений первого порядка с быстроосциллирующими коэффициентами. Полученная система решалась двумя методами: методом пристрелки и методом, основанным на теории Флоке—Ляпунова, который был предложен для решения подобных задач ранее (Макаров С. С., Устинов Ю. А. О методах исследования устойчивости гофрированных оболочек вращения // Доклады РАН, 2014, т. 459, № 4, с. 432–436.).

Анализ результатов вычислительных экспериментов показал, что оба метода дают весьма близкие результаты при нахождении первых пяти собственных частот, причем второй метод экономичнее по временным затратам примерно на 20%. Как и для задачи о крутильных колебаниях, было изучено влияние геометрических параметров оболочки на спектр: увеличение количества гофров, как и увеличение амплитуды гофра приводит к уменьшению значений собственных частот. Для трёх найденных резонансных частот были построены графики собственных форм — смещений, усилий и моментов.

Работа выполнена в рамках проектной части госзадания №9.665.2014.К в сфере научной деятельности.

Кромочные волны высшего порядка  
в полубесконечном полом цилиндре со свободным торцом

**Вильде М. В., Ардазишвили Р. В.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*  
mv\_wilde@mail.ru

Поверхностные волны, распространяющиеся вдоль края полого цилиндра (кромочные волны) исследованы в настоящее время только для случая тонкой оболочки на основе уравнений теории оболочек Кирхгофа—Лява. Показано (Вильде М. В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.:Физматлит, 2010), что теория оболочек описывает три типа таких волн: сверхнизкочастотную волну, переходящая с ростом частоты в волну другого типа — изгибную волну, и тангенциальную волну, характеризующуюся радиационным демпфированием, возникающим из-за связи тангенциальной и изгибной деформации в оболочке. Однако данные результаты применимы только для тонких оболочек и только в низкочастотном диапазоне, ограниченном областью применимости теории Кирхгофа—Лява. Представляет интерес исследование кромочных волн в оболочках на основе трехмерных уравнений теории упругости, что позволяет изучить изменение характера найденных волн с увеличением толщины, их поведение на высоких частотах, а также кромочные волны высшего порядка, не описываемые приближенными теориями тонких оболочек.

Данная работа посвящена исследованию гармонических кромочных волн высшего порядка в полубесконечном полом упругом цилиндре, торец которого свободен от закрепления. Для описания колебаний цилиндра используются трехмерные уравнения теории упругости в цилиндрической системе координат. На лицевых поверхностях цилиндра также ставятся условия свободного края. С использованием решения для цилиндрической трехмерной поверхностной волны в упругом полупространстве получены асимптотики при больших значениях волнового числа, показывающие, что в рассматриваемом теле существует бесконечное счетное множество кромочных волн высшего порядка, фазовые скорости которых стремятся с увеличением волнового числа к скорости волны Рэлея. В случае тонкостенного цилиндра можно выделить две серии кромочных волн: приближенно симметричные и приближенно антисимметричные. В случае толстостенного цилиндра следует использовать асимптотику, учитывающую наличие точки поворота. Данные, рассчитанные по асимптотикам, сопоставляются с результатами численного исследования, методика которого основана на методе разложения по модам. Для построения мод бесконечного полого цилиндра строится специальная фундаментальная система решений уравнения Бесселя, более удобная для данной задачи, чем традиционная фундаментальная система из функций Бесселя первого и второго рода, как с вычислительной точки зрения, так и с точки зрения асимптотического анализа поведения мод. В результате численных расчетов построены дисперсионные кривые для каждой волны и определены коэффициенты затухания, связанного с радиационным демпфированием кромочных волн распространяющимися модами.

## Клиновaя дисклинация цилиндра из материала Мурнагана

**Волокитин Г. И.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*

ivolokitin@bk.ru

Предлагается вариант метода возмущений, позволяющий учитывать физическую и геометрическую нелинейность. Клиновaя дисклинация в случае материала Мурнагана изучается с помощью деформаций вида  $R(r) = R_0(r) + u_1(r)$ ,  $\Phi = \varkappa\varphi$ ,  $Z = z$ , где  $\varkappa$  — положительная константа,  $R_0(r)$  — начальная деформация — точное решение краевой задачи о дисклинации для полулинейного материала, полученное ранее Л. М. Зубовым. Искомая функция — поправка  $u_1(r)$ , учитывающая различие в упругих свойствах материалов Мурнагана и Джона. Здесь  $r, \varphi, z$  — цилиндрические координаты в отсчетной конфигурации,  $R, \Phi, Z$  — в пространстве. Если ввести тензор напряжений Пиолы второго порядка  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{Q}_1 \cdot \nabla \mathbf{R}_0 + \mathbf{Q}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1$ , то из вариационного принципа — аналога принципа Ху—Вашицу в линейной теории, уравнение равновесия в объеме можно записать в виде  $\nabla \cdot \mathbf{D}_1 = \mathbf{0}$ .  $\nabla$  — набла-оператор в метрике недеформированного тела,  $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1$  — энергетические тензоры напряжений первого и второго порядков. Тензор  $\mathbf{Q}_0$  выбран для полулинейного материала:  $\mathbf{Q}_0 = W'_{D, \mathcal{E}_0}$ . Здесь  $W_D(\mathcal{E}_0)$  — потенциал Джона, он является сверткой тензоров  $\mathbf{Q}_0$  и  $\mathcal{E}_0$ , где  $\mathcal{E}_0$  — тензор конечной деформации Коши в невозмущенной задаче. Тензор напряжений возмущенной задачи  $\mathbf{Q}_1$  учитывает упругие свойства материала Мурнагана:  $\mathbf{Q}_1 = W'_{1, \mathcal{E}_0}$ , где  $W_1 = W_D(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1) + W_M(\mathcal{E}_0) - W_D(\mathcal{E}_0)$ . Из вариационного принципа следует, что  $\mathbf{Q}_0 = W'_{1, \mathcal{E}_1}$ . Поэтому величину, необходимую при учете добавочного перемещения в рамках полулинейного материала, принимаем как свертку тензоров  $\mathbf{Q}_0$  и  $\mathcal{E}_1$ . Тензор деформации определен равенством  $\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{R}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1^T + \nabla \mathbf{u}_1 \cdot \nabla \mathbf{R}_0^T)$ . Потенциал Джона — функция главных инвариантов квадратного корня из меры деформации Коши—Грина. Рассматривая известные соотношения, связывающие главные инварианты  $I_1, I_2, I_3$  меры Коши  $\mathbf{G}^\times$  и главные инварианты  $j_1, j_2, j_3$  тензора  $\sqrt{\mathbf{G}^\times}$  как систему неявных уравнений относительно неизвестных  $j_1, j_2, j_3$ , можно получить формулы производных  $\frac{\partial j_k}{\partial I_s}$ .

Например,  $\frac{\partial j_1}{\partial I_1} = \frac{j_2}{2(j_1 j_2 - j_3)}$ . С помощью этих формул найдено точное выражение энергетического тензора напряжений для полулинейного материала, коэффициенты квадратичного трехчлена  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0(\mathcal{E}_0)$  — функции главных инвариантов  $\sqrt{\mathbf{G}_0^\times}$ . Показано, энергетический тензор напряжений второго порядка имеет вид  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{A}_0 \operatorname{tr} \mathcal{E}_1 + \mathbf{A}_1 \cdot \mathcal{E}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot (\mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_0 \cdot \mathcal{E}_1) + \beta_0 \mathbf{E} + \beta_1 \mathcal{E}_0 + \beta_2 \mathcal{E}_0^2$ . Здесь  $\mathbf{A}_i$  — квадратичные трехчлены от тензора  $\mathcal{E}_0$  с коэффициентами, зависящими от главных инвариантов  $\sqrt{\mathbf{G}^\times}$  и модулей упругости Ламе. Коэффициенты  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  зависят еще и от констант третьего порядка. Отметим, градиент вектора добавочного перемещения  $\nabla \mathbf{u}$  входит линейно. Как и в невозмущенной задаче, компоненты тензора Пиолы второго порядка зависят только от  $r$ . Для определения поправки  $u_1$ , учитывающей упругие модули Мурнагана, получается линейное дифференциальное уравнение, аналогичное уравнению в случае материала Джона, но с более громоздкими коэффициентами. Краевая задача для такого линейного уравнения решается приближенно-разностным методом.

## Гранично-элементное моделирование поверхностных волн

**Воробцов И. В., Аменицкий А. В., Белов А. А.***НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского*  
igumnov@mech.unn.ru

В трехмерной постановке рассматриваются задачи о торцевом ударе хевисайдовой силой призматического тела (консоли) с жестко закрепленным концом. Задача в одномерной постановке имеет аналитические решения как для упругого, так и для вязкоупругого случаев.

Гранично-элементная сетка представлена 576 элементами. Получено численное ГЭ-решение на основе метода Дурбина. Представлены графики поведения упругих напряжений во времени на закрепленном конце и середине консоли. Приведены графики напряжений и перемещений свободного конца и середины консоли для моделей Максвелла, Кельвина—Фойгта, стандартного вязкоупругого тела при различных значениях параметра вязкости в областях заделки. Приведены графики напряжений и перемещений в областях заделки, свободного конца и середины консоли для степенной модели при фиксированном значении параметра амплитуды и при различных значениях параметра степени. Приведены графики напряжений в областях заделки, свободного конца и середины консоли для степенной модели при фиксированном значении параметра степени и при различных значениях параметра амплитуды.

Численно продемонстрирован эффект перестройки волновых полей граничных и внутренних перемещений и напряжений, когда свойства вязкоупругого материала изменялись с мгновенных модулей на длительные. В откликах перемещений продемонстрировано увеличение амплитуды и периода колебаний.

В трехмерной постановке рассмотрена задача о пороупругой консоли, свойства материала которой описываются классической моделью Био сжимаемого материала при длине консоли 3 м. На торец действует хевисайдовая сила. В одномерной постановке задача имеет аналитические решения. Задача решалась в постановке четырех базовых функций пороупругого материала. Гранично-элементная сетка состоит из 504 элементов. Приведены результаты расчетов перемещений и поровых давлений. Дано сравнение с результатами других авторов. Для демонстрации влияния инерционных эффектов жидкой фазы на результирующий отклик рассмотрен случай упрощенной модели. Для демонстрации влияния пористости на динамический отклик решена задача для консоли длиной 10 м на той же ГЭ-сетке. Установлено явление перехода свойств пороупругого материала из сжимаемого состояния в несжимаемое состояние.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 13-08-00658-а; 14-08-00811-а).

## Об аппланационных методах измерения внутриглазного давления

**Воронкова Е. Б., Бауэр С. М.**

*Санкт-Петербургский государственный университет*

e.voronkova@spbu.ru

В данной работе обсуждаются математические модели аппланационных методов измерения внутриглазного давления (ВГД).

При измерении давления аппланационным способом роговица глаза деформируется грузом с плоским основанием. О величине ВГД судят по диаметру зоны контакта при одинаковой силе воздействия (тонометр Маклакова) или по величине воздействия при заданном размере зоны контакта (тонометр Гольдмана). Различают истинное ВГД и тонометрическое, т.е. рассчитанное по показаниям прибора.

В первой модели глаз рассматривается как тонкая оболочка вращения, состоящая из двух эллипсоидальных сегментов, моделирующими роговицу и склеру. Предполагалось, что глаз до нагружения заполнен несжимаемой жидкостью, т.е. до и после нагружения объем глаза одинаков.

Расчеты показали, что одинаковой зоне контакта груза и роговицы в дальних глазах (сплюснутый эллипсоид) соответствует несколько большее значение истинного ВГД, чем в глазах с нормальным зрением, в близоруких глазах (вытянутый эллипсоид) истинное значение ВГД незначительно (меньше, чем на 1 мм рт. ст.), ниже, чем в глазах с нормальным зрением.

Для упругой системы роговица-склера показано, что чем меньше зона контакта груза и оболочки (за счет величины груза или внутреннего давления), тем больше доля усилий, направлена на изгибные деформации. Толщина роговицы существенно влияет именно на изгибные деформации оболочки. Показатели ВГД при измерении тонометром Гольдмана существенно более чувствительны к изменению толщины роговицы, чем показатели ВГД при измерении тонометром Маклакова, так как при измерении ВГД тонометром Гольдмана диаметр зоны контакта существенно меньше, диаметра зоны контакта при измерениях тонометром Маклакова (5 и 10 г) при тех же значениях ВГД.

Сравнение результатов полученных при моделировании аппланационных методов тонометрии для многослойной роговицы с результатами, полученными тем же методом для однородной роговицы, но с осредненными значениями упругих параметров составляющих ее слоев, показало, что зона контакта в первом случае больше, а следовательно, величина истинного внутриглазного давления меньше.

Модель многослойной оболочки позволила объяснить клинические данные, показывающие, что после рефракционных операций происходит снижение показателей внутриглазного давления, измеренных тонометрами и Гольдмана и Маклакова. При этом после операции LASIK наблюдаются более низкие показатели внутриглазного давления, чем после операции PRK при одинаковом изменении толщины и кривизны роговицы, что может быть объяснено появлением дополнительного слоя, возникающего при операциях LASIK.

## Изгибные колебания ортотропной пластины-полосы или балки переменной толщины при упругозащемленных опорах

**Геворкян Г. З.**

*Ереван, Институт механики НАН Армении*

gnungev2002@yahoo.com

Изгибные колебания балок при различных комбинациях классических граничных условий в классической постановке достаточно хорошо изучены. Относительно мало работ посвящено исследованию колебаний ортотропных балок переменной толщины по уточненным теориям при граничных условиях типа упругого защемления. В настоящей работе путем разложения поперечного сдвига по поперечной координате до второго порядка и последующего интегрирования уравнений движения по толщине пластинки получены уравнения движения пластины-полосы или балки с учетом влияния поперечного сдвига. При этом уравнения плоской задачи и задачи изгиба разделяются. Для задачи изгиба получается система из двух дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно поперечного перемещения и функции, характеризующей поворот нормали относительно нейтральной линии. Рассмотрена задача колебаний, получены уравнения колебаний ортотропной пластины-полосы или балки переменной толщины с учетом поперечных сдвигов и инерции вращения. Задачи для пластины-полосы или балки различаются только коэффициентами, определяемыми упругими постоянными.

Граничные условия упругой заделки применяются, когда поворот нейтральной оси пропорционален изгибающему моменту, а поперечное перемещение и поперечное усилие связаны линейно. Эти условия носят общий характер, поскольку надлежащим подбором постоянных можно получить условия жесткой заделки, шарнирного опирания, свободного конца и др.

Полученные уравнения решаются методом коллокаций или методом Галеркина. Для решения уравнений методом коллокаций в качестве точек коллокаций берутся нули смещённых полиномов Чебышева, а неизвестные функции — или обычные полиномы с неизвестными коэффициентами, или полиномы специального вида, удовлетворяющие граничным условиям. Удовлетворяя в точках коллокаций дифференциальным уравнениям, получим систему линейных алгебраических уравнений. Нули детерминанта полученной системы являются частотами собственных колебаний двух видов. Первая группа соответствует изгибным колебаниям, которые сопровождаются сдвиговыми колебаниями малых амплитуд. Вторая группа соответствует сдвиговым колебаниям, сопровождающимся изгибными колебаниями малых амплитуд. Вторая группа колебаний при классической постановке задачи отсутствует.

После нахождения частот собственных колебаний можно определить и вид нейтральной линии, соответствующей найденной частоте.

При различных законах изменения толщины (постоянная, линейная, параболическая), различных характеристиках упругой заделки и различных значениях упругих постоянных материала получены значения безразмерных частот. Изучено влияние переменной толщины, упругих постоянных материала и граничных условий на значения частот собственных колебаний.

## Об одной двумерной модели поляризации поликристаллических сегнетоэлектрических материалов

**Герасименко Т. Е.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
tanyapol@inbox.ru

Построение математических моделей, которые описывают нелинейные процессы, является актуальной и практически важной задачей. Актуальность задач моделирования внутренней структуры сегнетоэлектриков связана с возрастающей потребностью техники в преобразователях и излучателях, используемых как сенсоры и актуаторы, в миниатюрных силовых устройствах, в датчиках больших деформаций, в вибрационных пьезоэлектрических фильтрах.

В данной работе рассматривается алгоритм построения гистерезисных диэлектрических зависимостей поляризации от приложенного электрического поля в сегнетокерамических элементах в рамках модели плоской деформации. За основу решения поставленной задачи взята модель запертой стенки, которая также называется моделью Джилла—Атертона. Примечательно, что модель Джилла—Атертона создана для одномерного случая, в настоящей работе модель обобщена на двумерный случай с учетом взаимного влияния соседних электрических доменов на процесс их переключения. Вводится понятие ангистерезисной поляризации, т. е. такой поляризации, которая имела бы место в идеальном случае, когда влиянием соседних доменов на переключение диполей пренебрегают. Затем осуществляется коррекция модели на случай учета механизмов запираания доменных стенок и влияние на это соседних доменов. Оценивается работа электрического поля в реальном процессе поляризации и соответствующие затраты на поляризацию. В результате получаем энергетическое балансное уравнение, из которого выводим систему уравнений в дифференциалах. Для решения этой системы предложен метод последовательных приближений, позволяющий определить приращения остаточной поляризации представительного объема при переходе от одного равновесного состояния к другому в зависимости от приращения электрического поля. Так как поляризация складывается из остаточной и индуцированной части предлагается закон определения индуцированной части поляризации.

Построенная модель имеет 6 параметров, которые подбираются из условия совпадения экспериментальных и рассчитанных петель гистерезиса. Каждый из параметров модели имеет вполне определенный физический смысл и влияет в той или иной степени на вид кривой зависимости поляризации от электрического поля.

Проведена численная реализация алгоритмов построения больших петель гистерезисных зависимостей и выполнено сравнение с экспериментальными значениями.

Практическое применение данной модели заключается во внедрении разработанного алгоритма в конечно-элементный комплекс ACELAN.

## Длинноволновая асимптотика пульсовых волн в аорте

Гетман В. А., Батищев В. А.

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

Vnikaget@gmail.com

Длинные волны в жидкости, заполняющей цилиндрическую трубку с упругой границей, изучались многими авторами, начиная с конца девятнадцатого века. Большой вклад в теорию внес российский ученый Громека И. С. В известной монографии Педли (1983) приведен обзор литературы по этой тематике. Оказалось, что рассчитанная фазовая скорость волн в жидкости в упругой трубке хорошо подтвердилась экспериментально. Длинные спиральные волны в кровеносном сосуде с учетом анизотропии стенок впервые исследовал Устинов Ю. А. Большие трудности появляются при расчете коротких спиральных волн в упругих трубках. При асимптотическом исследовании этих волн возникает необходимость рассчитывать колеблющиеся пограничные слои, формирующиеся на стенке сосудов. Отметим, что в перечисленных выше работах метод пограничного слоя не использовался. В докладе приведены результаты расчетов длинных волн с использованием пограничных слоев. Рассмотрен случай, когда на входе в сосуд давление задано по времени несимметричным образом.

Длинные продольные и спиральные волны рассчитываются на основе нелинейной системы Навье—Стокса и динамических уравнений тонкой упругой изотропной оболочки с учетом малости коэффициента вязкости. Аорта моделируется цилиндром, ограниченным тонкой оболочкой. В безразмерных переменных возникают несколько малых параметров. Параметр, связанный с вязкостью, пропорционален толщине пограничного слоя. Второй малый параметр обратно пропорционален фазовой скорости волны Моуэнса—Кортевега. Применяется метод расчета длинных волн с введением медленной осевой координаты. Асимптотические разложения строятся по степеням второго малого параметра. В главном приближении возникает линейная задача, на основе которой рассчитываются длинные волны, распространяющиеся на фоне стационарного потока (течения Пуазейля). Решение задачи состоит из суммы функций двух видов. Функции первого вида в главном приближении описывают течение идеальной жидкости. Функции второго вида описывают пограничные слои. Отметим, что пограничные слои в крупных кровеносных сосудах наблюдаются при проведении хирургами операций на сердце и сосудах.

В докладе показано, что в ядре потока продольная компонента скорости длинных волн постоянна по сечению. Этот факт известен из экспериментов. Рассчитаны две волны — волна давления и квазипродольная волна. Оказалось, что вне пограничного слоя основной вклад в решение вносит только волна давления. Однако, внутри области пограничного слоя амплитуды обеих волн имеют одинаковый порядок. Для определения амплитуды длинных волн задано давление на входе в сосуд как функция времени. Эта функция, в отличие от известных публикаций, не обладает свойством симметрии по времени. Показано, что в конце систолы возникает зона противотока, причем область противотока локализована в пограничном слое. Скорость противотока стремится к нулю как при выходе из области пограничного слоя, так и при приближении к стенке сосуда.

## Симметричные трехпарциальные локализованные волны в ортотропном слое между ортотропными полупространствами

Глухов И. А.

*Донецкий национальный университет*

glukhov91@yandex.ua

Одним из современных этапов исследований по проблеме описания спектров и свойств локализованных волн деформаций в структуре «упругий слой, заключенный между упругими полупространствами» является обобщение результатов, полученных ранее для волноводных структур этого типа с изотропными или трансверсально-изотропными компонентами, на случаи низкосимметричных анизотропных материалов слоя и вмещающих полупространств. Эти классы задач наряду с фундаментальным значением имеют весьма высокую практическую востребованность в связи с актуальными приложениями в ультразвуковой диагностике, геоакустических технологиях, акустоэлектронике.

В данном контексте целью представляемых исследований является теоретический численно-аналитический анализ проблемы дисперсионных, энергетических и кинематических свойств локализованных трехпарциальных бегущих упругих волн в ортотропном слое между ортотропными полупространствами с коллинеарными упруго-эквивалентными направлениями. Рассмотрены случаи локализованных волн с симметричными и антисимметричными колебательными перемещениями по толщине слоя, имеющего с однотипными по физико-механическим свойствам вмещающими полупространствами идеальный механический контакт, либо несовершенный контакт с проскальзыванием. Для задач о спектрах локализованных упругих волн в описанной постановке в аналитической форме получены трансцендентные дисперсионные соотношения, имеющие вид равенств нулю функциональных определителей шестого порядка. Применительно к рассматриваемым случаям осуществлено качественное исследование распределений корней характеристических полиномов для систем дифференциальных уравнений относительно комплексных амплитудных функций волновых перемещений в слое и полупространствах и выделены области изменения параметров частоты и волнового числа, в которых гипотетически возможно существование действительных ветвей спектров исследуемых локализованных бегущих волн при различных сочетаниях физико-механических свойств слоя и окружающих полупространств. Описаны области изменения параметров частоты и волнового числа, в которых анализируемые формальные представления описывают «волны с вытеканием энергии в процессе распространения». Построена соответствующая рассматриваемому случаю предельная асимптотическая форма дисперсионных соотношений для трехпарциальных симметричных и антисимметричных локализованных волн в высокочастотном коротковолновом диапазоне.

Реализованы расчеты ветвей спектров трехпарциальных локализованных волн симметричного и антисимметричного типов в рассматриваемых структурах с компонентами, обладающими свойствами ортотропных геоматериалов.

Сделан ряд обобщающих выводов относительно механизмов трансформации спектров бегущих локализованных волн при монотонном варьировании ориентации направления распространения в плоскости слоя для конкретного варианта физико-механических параметров для ортотропных составляющих волновода.

## Локализация повреждений в тонкостенных элементах конструкций методом обращения времени

**Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Еремин А. А.**

*Краснодар, Институт математики, механики и информатики,*

*Кубанский государственный университет*

eremin\_a\_87@mail.ru

Благодаря своей чувствительности к локализованным неоднородностям бегущие упругие волны (волны Лэмба и SH-волны) широко применяются в системах ультразвукового неразрушающего контроля и мониторинга состояния тонкостенных инженерных конструкций для обнаружения повреждений. Взаимодействуя с препятствиями различных типов, диагностирующий волновой сигнал генерирует рассеянные волновые поля и может быть использован для их обнаружения.

Одним из методов идентификации неоднородностей на основе измеряемых нестационарных волновых полей является метод обращения времени. Сочетая относительную простоту реализации и физическую наглядность получаемых результатов, он эффективно применяется для решения обратных задач волновой динамики в геофизике, акустике океана и неразрушающем контроле. В основе метода лежит обратимость волнового оператора по времени, что позволяет рассчитывать движение волн вспять к источнику в среде без диссипации. Обращенное волновое поле фокусируется в окрестности источника колебаний или локализованного рассеивателя, указывая на их местоположение. Теоретически по характеристикам волнового поля, измеренным на поверхности, окружающей излучатель, возможно точное определение его местоположения, размера и формы. Однако на практике измерения проводятся в ограниченном наборе точек, причем зачастую не всех компонент волнового движения. Кроме того, наряду с системой измерения и обработки сигналов для применения метода необходима эффективная компьютерная модель, адекватно учитывающая особенность строения inspected конструкции (например, слоистость и анизотропию композитных материалов) и позволяющая быстро восстанавливать характеристики обращенного волнового поля.

В настоящем докладе обсуждается реализация метода для тонкостенных конструкций из изотропных материалов, базирующаяся на измерениях с помощью лазерной доплеровской виброметрии и компьютерном моделировании на основе явных интегральных и асимптотических представлений для волновых полей, возбуждаемых поверхностной нагрузкой. В качестве входных данных для вычисления частотного спектра обращенных по времени сигналов используются измеренные вертикальные компоненты скорости смещения поверхности образца. Приводятся результаты экспериментальной верификации, проведенные на алюминиевых образцах с искусственными дефектами в виде поверхностных неоднородностей и пленочными пьезоактивными элементами, используемыми в качестве источников набегающих волн. Установлено, что уже при 4–5 точках измерения местоположение пьезоактуатора или рассеивателя восстанавливается вполне надежно.

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.189.2014К) и при поддержке гранта РФФИ № 14-08-00370.

## Взаимодействие звуковых и ультразвуковых волн с многослойными упругими пластинами

**Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Мякишева О. А.**

*Краснодар, Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет*

miakisheva.olga@gmail.com

Для моделирования волновых процессов, лежащих в основе работы акустического микроскопа и бесконтактных пьезоактуаторов (air-coupled transducers), рассматривается взаимодействие акустического волнового поля с упругой пластиной, погруженной в акустическую жидкость (вода или воздух). Рассматривается ряд краевых задач, в которых колебания многослойной пластины описываются как полной системой уравнений Ляме, так и упрощенными уравнениями теории тонких пластин Кирхгофа—Лява. Предполагается, что волновое поле возбуждается точечным сферическим источником, который расположен в верхнем акустическом полупространстве. Интерес представляет распределение энергии источника между отраженными, прошедшими и возбуждаемыми в пластине бегущими волнами. Последние в процессе распространения вдоль пластины также переизлучают энергию в окружающую среду, при этом являясь фактически движущимися источниками колебаний.

Исследуются диаграммы направленности отраженных и прошедших волн как в лучевом приближении (без учета переотражений внутри пластины), так и на основе асимптотик объемных сферических волн, которые получены из точного интегрального представления решения в виде обратного преобразования Фурье. Проводится сопоставление результатов, полученных в рамках интегрального и лучевого подхода, которые показывают пределы их применимости. На основе полученных частотных спектров строятся нестационарные решения. Особенности распространения узкополосных нестационарных сигналов иллюстрируются численно полученными стоп-кадрами и с помощью обобщающей их компьютерной анимации. Также анализируется переизлучение энергии волновых пакетов в процессе их распространения вдоль пластины.

Самостоятельный интерес представляют проблемы акустического зондирования анизотропных пластин (волоконно-армированных слоистых композитов). Для вывода интегрального представления решения в общей трехмерной постановке динамической теории упругости здесь предлагается использовать разработанный ранее алгоритм построения матрицы Грина для слоистых упругих сред с произвольной анизотропией слоев, обобщенный для рассматриваемого случая пластины, погруженной в акустическую жидкость.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 1.189.2014К) и при поддержке гранта РФФИ № 13-01-96520.

## Верификация робототехнических иерархических систем реального времени

**Глушкова В. Н.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
lar@aaanet.ru

Робототехнические системы относятся к классу дискретных систем реального времени. Поведение таких систем характеризуется неограниченной последовательностью переходов между состояниями  $St_1 \rightarrow St_2 \rightarrow \dots \rightarrow St_n \rightarrow \dots$ , которые описываются конечными временными автоматами без финальных состояний, расширенных множеством переменных-локальных часов. В идеологии «model checking» верификация систем основана на спецификации их свойств формулами темпоральных логик, проверяемыми на деревьях вычислений, порождаемых автоматами. Особенно сложным для технических систем является анализ динамических свойств поведения, включающих временные ограничения. Он основан на вычислительно сложных алгоритмах построения временных регионов (классов эквивалентности состояний временных автоматов), которые проверяют ограниченный диапазон свойств.

Язык ИП 1-го порядка, расширенный введением переменных сорта «list» (список), позволяет явно использовать переменные времени и более адекватно формализовывать динамическое поведение. Списками легко представить дерево вычислений, иерархизирующее пространство состояний и действий системы. Для описания деревьев используем правила вида  $St_i \rightarrow \{Act\}^+ St_j$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $Act$ ,  $St_i$  — имена действий и состояний для КС-грамматики  $G$ . Правилам  $G$  можно поставить в соответствие конечный автомат с состояниями  $St_i$  и дугами, помеченными символами  $Act$  при переходе от  $St_i$  к  $St_j$ . Приведем правило для робота, который из состояния  $Pick$  поднимает ящик (действие  $apick$ ) и переходит в новое состояние  $TurnR$  (поворот направо):  $Pick \rightarrow apick TurnR$ .

Для спецификации будем использовать квазитождества с отрицаниями вида:  $\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \rightarrow \psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ ,  $\varphi$  ( $\psi$ ) — конъюнкция атомарных формул или их отрицаний вида  $p$ ,  $f = \tau$ ,  $\tau_1 = \tau_2$ ,  $p$ ,  $f$ ,  $\tau$  — символы предикатов, функций и термов соответственно. В префиксе формулы используются кванторы  $\forall x_i \in y_j$ ,  $\forall x_i < y_j$ ,  $\dot{\in}$  — транзитивное замыкание отношения  $\in$ ,  $<$  — отношение «левее» для элементов списка. Полиномиальный (относительно «размера» дерева) алгоритм построения модели реализует прямой логический вывод для заданной теории из квазитождеств. Предикаты, функции, аксиомы теории, сорта переменных согласованы с символами и правилами преобразованной грамматики  $G$ . Правила этой грамматики применяются к исходному дереву в процессе вычисления; для символов  $St_i$  и  $Act$  они включают временные и др. количественные характеристики. В качестве непрерывного времени используются сегменты  $< t_1, t_2 >$ , отражающие длительность действия. Например, предикат  $apick([1, 2])$  означает, что робот поднимает ящик от 1 до 2 секунд. В качестве дискретного времени может использоваться конкретное значение времени  $t$  или  $n$  — количество вызовов соответствующего конечного автомата. Реагирующие системы проектируются бесконечно функционирующими, учет  $n$  позволяет верифицировать их некорректное поведение. Например, формула  $Pick(n) \wedge \neg apick([1, 2], n) \rightarrow Break(n)$  диагностирует поломку робота из-за невыполнения соответствующего действия.

## Анализ течений невязкой несжимаемой жидкости бессеточными методами

**Говорухин В. Н.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
vngovoruhin@sfedu.ru

Математические модели динамики невязкой жидкости позволяют анализировать задачи вихревой динамики, геофизики, массопереноса. Для решения соответствующих уравнений в частных производных необходимы численные методы, позволяющие проводить исследование движений жидкости с высокой степенью детализации и использовать современную вычислительную технику. Для изучения рассматриваемого в докладе класса задач такими качествами обладают бессеточные методы.

Рассматривается система двух уравнений в частных производных

$$\frac{D\omega}{Dt} \equiv \omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = 0, \quad \omega = -\Delta\psi + \Lambda^2\psi - \frac{1}{2}\gamma r^2. \quad (1)$$

Здесь  $\omega$  — потенциальная завихренность,  $\psi$  — функция тока,  $t$  — время,  $x, y$  — координаты на плоскости,  $\gamma, \Lambda$  — параметры, а  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  — полярный радиус. Область течения  $D = 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ . На границе  $D$  заданы условия непротекания или протекания на ее части, а также начальное условие для  $\omega$ .

В докладе представлен алгоритм анализа динамики и взаимодействия плоских вихревых конфигураций жидкости, который включает:

- расчет динамики идеальной несжимаемой жидкости на основе варианта метода вихрей в ячейках для решения (1);
- анализ вихревой конфигурации с помощью предложенного эвристического метода оценки ее структуры;
- построение фазового портрета поля скорости жидкости для разных  $t$ ;
- изучение массопереноса с помощью локальных показателей Ляпунова.

Все этапы алгоритма обладают высокой степенью внутреннего параллелизма, что позволяет эффективно использовать для его реализации многопроцессорную технику. В докладе обсуждается параллельная версия алгоритма.

С помощью описанного численного подхода удалось провести анализ следующих задач вихревой динамики:

- сценарии взаимодействия двух распределенных разнонаправленных вихрей в канале конечной длины при наличии протекания;
- формирование застойных зон в каналах при наличии протекания;
- взаимодействие однонаправленных распределенных вихрей в присутствии силы Кориолиса ( $\gamma \neq 0$ ).

В докладе приведены результаты соответствующих расчетов.

Работа поддержана РФФИ, код проекта 14-01-00470.

Пациенто-ориентированное моделирование желудочков сердца:  
биомеханический подход

**Голядкина А. А., Полиенко А. В., Хайдарова Л. Р., Номеровская Е. А.**  
*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*  
aagramakova@mail.ru

Исследование, представленное в данной работе, направлено на развитие персонализированной медицины в Российской Федерации. По данным Росстата (2013) 58.1% в структуре смертности населения составляют заболевания сердечно-сосудистой системы, из них первое место (49.1%) принадлежит ишемической болезни сердца (ИБС). Частым следствием ИБС является инфаркт миокарда, который нередко (в 10–34% случаев) осложняется развитием постинфарктной аневризмы (Бокерия Л. А., 2002; Белов Ю. В., 2011).

Построение моделей желудочков сердца и соответствующих им объемов крови осуществлялось по данным компьютерной томографии с использованием программного пакета 3D Slicer и системы автоматизированного проектирования SolidWorks. Данные компьютерной томографии были предоставлены Клиникой аортальной и сердечно-сосудистой хирургии ГБОУ ВПО «Первый МГМУ им. И. М. Сеченова Минздрава России». Численный эксперимент был проведен в расчетном комплексе Ansys Workbench методом конечных элементов. Кровь предполагалась однородной, несжимаемой и ньютоновской жидкостью с заданными плотностью и динамической вязкостью, данные параметры были определены по результатам общего и биохимического анализа крови пациента, а материал стенок (миокард) — однородным, изотропным, гиперупругим. Был проведен анализ моделей материала стенки для выбора наиболее соответствующей графику зависимости напряжение-деформация, полученного ранее в процессе натуральных экспериментов. Было выявлено, что теоретическая кривая, соответствующая трехпараметрической модели Муни—Ривлина, достаточно хорошо приближает экспериментальную. На основе данных компьютерной томографии и ультразвукового исследования были определены начальные и граничные условия, соответствующие конкретному пациенту. В результате численного эксперимента были получены картины гемодинамики (распределение значений давления, вектора скорости) с учетом напряженно-деформированного состояния (распределение значений эквивалентных напряжений и модуля вектора перемещения) стенок желудочков сердца по фазам сердечного цикла. Также была проведена оценка конечно-диастолического объема и фракции выброса желудочков сердца.

Полученные результаты были верифицированы на основе сравнения с клиническими данными исследованного пациента. Выявлено, что погрешность составила менее 10%. Данные погрешности обусловлены физиологическими особенностями живого организма. Кроме того, при численной реализации используются параметры материала миокарда не конкретного пациента, а из базы данных, сформированной по результатам натуральных экспериментов.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект №14-01-31383-мол\_a).

## Получение граничных условий для решения задач атерогенеза в коронарных артериях человека

**Гришина О. А.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*  
nano-bio@sgu.ru

Одним из наиболее широко распространенных хронических заболеваний коронарных артерий человека является атеросклероз, характеризующийся разрастанием соединительной ткани за счет отложения липидов в интиме сосудов в результате нарушения метаболизма липопротеинов. Для оценки локального накопления липидов возникает необходимость решения задачи диффузии липопротеинов в межэндотелиальные щели. Целью данной работы является определение граничных условий, характеризующих внешние факторы, действующие на липопротеины в здоровом и пораженном коронарном русле.

Эффективным способом, позволяющим оценить гемодинамику коронарных артерий с учетом напряженно-деформированного состояния их стенок является численное моделирование. Применение современных вычислительных программ на основе методов конечно-элементного моделирования дает возможность учитывать индивидуальные особенности сосудистого русла, такие как геометрия (искривленность, бифуркации, ответвления), механические свойства тканей сосудистой стенки, а также скорость и давление крови на различных участках его сосудистого русла с учетом взаимодействия коронарных артерий со стенками миокарда, а в сочетании с надежностью CFD решателей, предоставляет уникальную возможность оценить локальные гемодинамические параметры. Граничные условия для решения задач атерогенеза были получены в результате проведенных исследований в программном комплексе ANSYS Multiphysics. В качестве объекта исследования использовалась трехмерная максимально точная модель коронарных артерий с учетом пространственной ориентированности ветвей. Кровь задавалась однородной, несжимаемой, ньютоновской жидкостью. Движение крови описывалось нестационарными уравнениями Навье—Стокса. Материал стенок моделировался неоднородным, изотропным. Значения плотности, коэффициента Пуассона и модуля упругости были получены экспериментально как для здоровой, так и для пораженной атеросклерозом стенки сосуда. Граничные условия, используемые при моделировании наиболее корректно описывают физиологический процесс.

В результате моделирования здорового и стенозированного коронарного русла получены локальные гемодинамические параметры, влияющие на процесс сосудистого атерогенеза, такие как эквивалентные и касательные напряжения, деформации, давление и скорость потока в конкретной зоне сегмента.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-15-00128, СГУ).

## Моделирование пьезоактивных материалов методами молекулярной динамики

**Груздев Р. Ю., Репнякова С. Ю.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
rgruzd91@gmail.com

Моделирование пьезоактивных наноматериалов проводится в программном комплексе LAMMPS. Для учета явления поляризации применяется модель «Adiabatic core/shell(cs) model» Митчелла и Финчхама. Суть данной модели заключается в имитации электронной оболочки иона путем введения мнимого атома, который прикрепляется к рассматриваемому иону. Таким образом, ион разделяется на две части: «ядро» — реальный атом и «оболочка» — мнимый атом, который взаимодействует с электрическим полем, порождая поляризацию.

Взаимодействие «ядра» и «оболочки» осуществляется при помощи упругой силы, для расчета которой требуется определить параметризованный коэффициент упругости  $k$  и расстояние  $r$  между «ядром» и «оболочкой». Заряд «ядра» и «оболочки» распределяются таким образом, что суммарный их заряд равен заряду иона. Аналогично распределена масса, но «ядро» забирает ее большую часть.

Чтобы запустить эту модель в LAMMPS, мы используем свойства атомов `atom_style = full`, для того, чтобы иметь доступ к зарядам и связям, так как каждая пара «ядро—оболочка» требует описания двух заряженных атомов и связи между ними. Также должны быть использованы специальные версии потенциалов Борна—Мэйера—Хагенса или потенциал Букингема (добавка `cs`): `pair_style born/coul/long/cs` или `pair_style buck/coul/long/cs`.

Есть некоторые нюансы, которые следует учесть при использовании данной модели. Хотя относительное движение частиц «ядра» и «оболочки» соответствует поляризации, другие параметры системы могут повлиять на этот процесс, поэтому рекомендуется отделить относительное движение от реальной системы при помощи средств LAMMPS. Также желательно не вводить энергию напрямую в относительное движение, а присваивать скорости центрам масс пар «оболочка—ядро». Наконец, следует учесть погрешности, возникающие из-за деления масс и зарядов, и выбрать правильный шаг по времени для получения более точных результатов.

В качестве практических задач были рассмотрены: модельная задача для NaCl, тестовые задачи для ZnO. Целью первой задачи было подробное изучение метода, его особенностей и влияния различных параметров на результат. Во второй части (группа задач) рассмотрены статические задачи. Полученные результаты согласуются с результатами из литературы, метод и выбранные модели могут быть подвергнуты дальнейшему изучению и модификации, а также использованы в задачах по определению физических свойств различных пьезоэлектриков.

## Проекционный метод в решении плоских обратных задач

Гукасян Л. С.<sup>1</sup>, Недин Р. Д.<sup>2</sup><sup>1</sup>*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*<sup>2</sup>*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

luska-90@list.ru

Совершенствование и развитие моделей деформирования упругих тел в настоящее время происходит в двух направлениях. Первое направление развивается по пути учета анизотропии среды, второе — учитывает неоднородность и приводит к исследованию краевых задач для эллиптических дифференциальных операторов с переменными коэффициентами. Для таких моделей успехи в исследовании конкретных задач при известных законах неоднородности достаточно скромны. Главная проблема при использовании такой модели состоит в определении законов неоднородности из некоторой дополнительной информации. Особый интерес для исследования задач в этом направлении представляет исследование простейшей линейной задачи, в которой известны компоненты поля смещений внутри области, а требуется определить функции, характеризующие переменность модулей упругости. Это естественным образом приводит к исследованию задачи Коши для системы уравнений в частных производных первого порядка.

В настоящей работе рассмотрена обратная двумерная задача для оператора теории упругости об определении переменных непрерывно дифференцируемых коэффициентов Ляме, зависящих от двух координат. Дополнительной информацией, которая считается известной в обратной задаче, является информация о поле смещений внутри области в наборе точек. Этап реконструкции может осуществляться несколькими методами: с помощью разностных аппроксимаций, с помощью решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, на основе проекционной схемы типа Ритца. Сформулирована слабая постановка задачи в виде некоторого интегрального тождества, удовлетворение которому осуществляется с помощью представления искомых функций в виде линейной комбинации базисных функций. Окончательно проблема сведена к решению линейной алгебраической системы.

Представлены численные результаты по реконструкции переменных модулей упругости для различных типов зависимостей (для прямоугольной области), проанализировано влияние способа нагружения, выявлены неблагоприятные режимы граничного воздействия.

Авторы выражают благодарность Ватульяну А. О. за внимание к работе.

Работа выполнена в рамках проектной части госзадания №9.665.2014.К в сфере научной деятельности.

## Методика оптимизации процесса стоматологического протезирования

**Доль А. В., Иванов Д. В., Смирнов Д. А.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*  
dzero@pisem.net

Операции по дентальной имплантации на сегодняшний день стали неотъемлемой частью современной стоматологии. Срок функционирования установленных имплантатов зависит от многих факторов, таких как свойства костной ткани, состояние мягких тканей полости рта, а также от самого процесса планирования и выполнения хирургического лечения.

Современные методы биомеханики, математического и трехмерного моделирования, а также конечно-элементных расчетов дают возможность минимизировать количество неудачных операций и сократить число негативных последствий.

В данной работе рассмотрены основные этапы методики оптимизации процесса имплантации. Данная методика охватывает весь процесс восстановления утраченных зубов от первого посещения пациентом стоматолога до итоговой операции.

На первом этапе на основе компьютерной томограммы челюсти проводится первичное определение мест установки имплантатов и углов их наклона. Далее по данным КТ строится точная трехмерная модель челюсти.

Построенная компьютерная модель челюсти дает возможность хирургу с провести высокоточное позиционирование моделей имплантатов в местах их предполагаемой установки. После проведения так называемой виртуальной имплантации на интересующем врача участке кости моделируется стоматологический шаблон, который впоследствии изготавливается на 3D-принтере и используется хирургом во время операции для установки имплантатов в запланированные точки под нужными углами.

Хирургическое лечение необходимо планировать не только с точки зрения медицины, но и с точки зрения механики. Для оптимального позиционирования имплантатов в кости в рамках данной методики предлагается проводить серию конечно-элементных расчетов, позволяющих разместить конструкцию так, чтобы ни в ней, ни в окружающей костной ткани не возникало критических напряжений, способных привести к разрушению.

Комплексный подход к планированию операции по установке имплантатов позволяет значительно снизить риск возникновения осложнений как в первые дни после операции, так и на протяжении всего периода использования установленных конструкций. При этом в рамках рассматриваемой методики создается шаблон, который позволяет устанавливать имплантат именно так, как было запланировано на подготовительном этапе, а это, в свою очередь, значительно упрощает работу хирурга непосредственно в ходе операции.

Оценка тангенциальных компонент матрицы жесткости для описания динамического поведения поврежденных разномодульных интерфейсов

**Дорошенко О. В., Голуб М. В.**

*Краснодар, Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет*

oldorosh@mail.ru

Одно из направлений в неразрушающем контроле, продолжающее интенсивно развиваться с совершенствованием приборной базы, — это идентификация отслоений и трещин с помощью упругих волн. Обычно для описания трещины используется математическая модель со свободными от нормальных и касательных напряжений берегами. Однако в случае повреждения интерфейсов могут иметь место зоны неидеального контакта, представляющие собой распределённый набор микродефектов, с чередованием областей прерывности и непрерывности в перемещениях. Их идентификация усложняется тем, что волновые поля, рассеянные на отслоениях, имеют меньшие амплитуды. Альтернативный подход заключается в моделировании повреждённого интерфейса тонким вязкоупругим слоем, что аналогично использованию пружинных граничных условий. Последние записываются как условие непрерывности напряжений, которые равны произведению матрицы жёсткости на вектор скачка перемещений на повреждённом интерфейсе. Матрица жёсткости в случае изотропных материалов имеет диагональный вид. Если в плоском случае все диагональные компоненты матрицы жёсткости равны, то в трёхмерном значении тангенциальных компонент отличаются от нормальных. Рассматривая падение плоской волны на повреждённый интерфейс, находящийся между двумя полупространствами, можно получить выражение для полного коэффициента прохождения. После этого необходимо приравнять коэффициенты прохождения, полученные при использовании пружинных граничных условий и модели, описывающей повреждённый интерфейс распределением микротрещин. Предполагается, что характерные размеры микродефектов малы по сравнению с длиной падающей волны. Как и для плоского случая, полный коэффициент прохождения выражается через среднее значение скачка перемещений на одиночной круговой трещине, определяемое в виде разложения по присоединённым полиномам Лежандра, и упругие модули материалов. При решении используется интегральный подход и асимптотическое представление матрицы Грина, что в свою очередь позволяет получить полуаналитическое выражение для функции раскрытия берегов трещины. Анализ падения Р-волны позволяет получить достаточно простое аналитическое выражение для нормальной компоненты матрицы жёсткости. Для нахождения тангенциальных компонент необходимо рассматривать падение SV-волны. Определение тангенциальных компонент матрицы жёсткости с достаточной точностью требует решения СЛАУ девятого порядка, которая составляется в явном виде и не требует вычисления интегралов. Тем не менее в общем случае (для произвольной пары материалов) определение тангенциальной компоненты производится численно. В заключение производится сравнение с известными результатами.

Работа выполнена при поддержке Минобразования и науки РФ (проект № 1.189.2014К) и РФФИ (проект № 13-01-96516).

## К определению области деструкции в трубе

Дударев В. В., Мнухин Р. М.

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

dudarev\_vv@mail.ru

На сегодняшний день одной из актуальных проблем современной биомеханики является задача моделирования поведения живых тканей. При этом важно отметить, что большинство из них находятся в сложном предварительном напряженном состоянии. Такое состояние играет важную роль, обеспечивая основные функциональные свойства и повышая прочностные характеристики. В качестве важного примера можно привести большие кровеносные сосуды, в стенках которых присутствуют неоднородные предварительные напряжения (ПН). Неразрушающая идентификация таких напряжений позволит более точно описывать полное напряженно-деформированное состояние. Отметим, что в рамках теории упругости для выявления основных свойств таких сосудов можно использовать модель трубы при наличии неоднородного поля ПН.

В работе представлена прямая задача об установившихся радиальных колебаниях однородной изотропной трубы при наличии неоднородного поля ПН. Колебания вызываются распределенной нагрузкой, приложенной к внешней границе стенки. Постановка задачи сформулирована в рамках плоского деформированного состояния с использованием модели ПН Треффтца—Гузя. При этом принято, что отличными от нуля являются радиальная  $\sigma_r^0(r)$  и тангенциальная  $\sigma_\varphi^0(r)$  компоненты тензора ПН, удовлетворяющие уравнению равновесия. Считается, что такое неоднородное поле ПН образовано действием внутреннего давления в активной фазе нагружения с появлением зоны деструкции в виде пластической области. Приведены выражения для законов изменения компонент  $\sigma_r^0(r)$  и  $\sigma_\varphi^0(r)$  и формула для определения радиуса зоны пластичности для модели упругопластического и упрочняющегося материала. Проведен анализ изменения первых трех резонансных частот колебаний в зависимости от уровня ПН.

При решении обратной задачи об определении уровня ПН и радиуса зоны пластичности рассмотрена задача о свободных колебаниях преднапряженной трубы. С помощью метода линеаризации получена формула, связывающая изменение значений резонансной частоты радиальных колебаний трубы с законами изменения компонент  $\sigma_r^0(r)$ ,  $\sigma_\varphi^0(r)$  и формой свободных колебаний трубы при отсутствии ПН, которая выписана в аналитическом виде через функции Бесселя. С помощью этой формулы обратная задача сведена к решению системы двух трансцендентных уравнений относительно двух неизвестных по данным об изменении резонансных частот. Проведена серия вычислительных экспериментов по реконструкции неизвестных величин по значениям двух первых резонансных частот. Анализ полученных результатов реконструкции показал, что при точных входных данных для модели упругопластического материала погрешность восстановления величин не превосходит 0.3%.

Авторы благодарят профессора А. О. Ватульяна за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-00196, 14-01-31393) и Южного математического института (г. Владикавказ).

## Добротность как характеристика эффективности в спортивной биомеханике

**Дышко Б. А.**

*Москва, ООО «Спорт Технолоджи»*

sporttec@yandex.ru

Повышение эффективности выполнения локомоций человека, начинающих с быстрого растяжения предварительно напряженных мышечно-сухожильных структур нижних конечностей (прыжки, бег) зависит от способности этих структур рекуперировать энергию их упругой деформации.

Для оценки упруго-вязких характеристик биологических объектов может быть использован метод затухающих колебаний. Это дает возможность оценить некие «эквивалентные биомеханические» характеристики исследуемой биосистемы, например, жесткостные и демпфирующие характеристики.

При изучении эквивалентных биомеханических характеристик мышечно-сухожильных структур голеностопного сустава (МССГС) исследуемая биосистема моделировалась однозвенной колебательной системой с сосредоточенными параметрами.

Характеристики данной системы (коэффициенты жесткости и демпфирования) определялись из анализа кривой вертикальной составляющей силы реакции опоры. Однако знание только эквивалентных биомеханических коэффициентов жесткости и демпфирования МССГС не дает полную «картину» функционирования системы. В частности, остается неизвестной степень использования или рекуперации энергии упругой деформации в исследуемых структурах нижних конечностей.

Оценить степень использования или рекуперации энергии упругой деформации в этой биосистеме можно с помощью метода электромеханических аналогий, который базируется на «сходстве» математических уравнений, описывающих колебания массы в механической системе и колебания тока в электрическом колебательном контуре. Отталкиваясь от математического тождества уравнений, лорд Рэлей ввел понятие «электромеханические аналогии». То есть, вместо механической цепи предлагается рассматривать электрический колебательный контур.

Важнейшей характеристикой электрических колебательных контуров является добротность. По определению (для электрического контура) добротность численно равна отношению максимальной энергии, запасаемой в контуре, к энергии, рассеиваемой за период резонансных колебаний на активном сопротивлении.

Выявлено, что «эквивалентная биомеханическая добротность» функционально зависит от значений элементов биосистемы. То есть, эквивалентная биомеханическая добротность может быть использована как интегральная характеристика, отражающая функциональное состояние мышечно-сухожильных структур голеностопного сустава и их способность рекуперировать энергию упругой деформации.

## Исследование стационарных течений невязкой несжимаемой жидкости через прямоугольный канал

**Жданов И. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

bugfixer@bk.ru

Исследования задач протекания жидкости вызывают интерес исследователей не одно десятилетие, что объясняется их многочисленными приложениями. В частности, с их помощью можно моделировать многие биологические процессы, такие как течение крови, распространение и взаимное проникновение различных веществ, транспорт лекарственных препаратов между различными частями организма и т. п. Основной интерес в этих задач представляют такие явления, как образование застойных зон, скорость протекания, устойчивость течений, влияние различных внешних воздействий.

В этой работе речь пойдет о стационарной задаче протекания идеальной жидкости сквозь канал, поиске и анализе стационарных течений, исследовании устойчивости полученных решений. Понятно, что рассматриваемая постановка задачи не может служить полноценной моделью течения биологических жидкостей, поскольку не учитывает многие факторы, такие как вязкость, многокомпонентность, гибкость границ и другие явления, но может позволить понять некоторые фундаментальные процессы формирования застойных зон в каналах.

Рассматривается стационарное уравнение Эйлера, сформулированное в терминах функции тока и завихренности

$$\omega_x \psi_y - \omega_y \psi_x = 0, \quad \Delta \psi = -\omega \quad (1)$$

Здесь,  $\psi = \psi(x, y)$  — функция тока,  $\omega = \omega(x, y)$  — завихренность. На границах прямоугольного канала со сторонами  $a$  и  $b$  задаются условия:

$$\psi(x, 0) = c_1, \psi(x, b) = c_2, \psi(0, y) = g_1(y), \psi(a, y) = g_2(y), \int_0^a g_1(y) dy = \int_0^a g_2(y) dy$$

Для решения задачи (1)–(2) реализованы следующие подходы:

- Решения задачи (1)–(2) разыскивалось методом Галеркина в предположении наличия линейной зависимости  $\omega = K\psi$ , что позволяет строить течения в виде:  $\psi(x, y) = \frac{1}{a}(xg_2(y) + (a-x)g_1(y)) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} C_{i,j} \Phi_{i,j}(x, y)$ , где  $C_{i,j} \in \mathbb{R}$  находятся аналитически, а  $\Phi_{i,j}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b}$ .
- Реализован метод конечных разностей решения задачи (1)–(2), с его применением найдены стационарные течения с различными зависимостями  $\omega(\psi)$ .

Проведен численный анализ устойчивости найденных стационарных решений, показано, что течения могут быть неустойчивыми или иметь нейтральный спектр. Для исследования соответствующей задачи в возмущениях применяется спектрально-разностный метод. Представлены результаты численных экспериментов по анализу времени протекания и динамики жидких частиц в канале.

Работа поддержана РФФИ, код проекта 14-01-00470.

## Численное моделирование турбулентного течения в мелком протяженном открытом безнапорном русловом потоке

**Жиляев И. В.<sup>1</sup>, Надолин К. А.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*

<sup>2</sup>*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
zhilyaev@mail.com

Представлены новые результаты численного исследования предложенной ранее редуцированной математической модели мелкого протяженного потока. Учет турбулентности течения осуществляется полуэмпирически в рамках гипотезы Буссинеска. Верификация модели проводится путем сравнения данных прямого численного моделирования на основе полных уравнений гидродинамики вязкой жидкости и результатов, полученных на основе редуцированной модели. Вычислительные эксперименты проводились с использованием конечно-элементного комплекса COMSOL Multiphysics (Femlab).

В основу предлагаемого подхода к выводу используемых модельных уравнений положены следующие соображения:

- Русловые потоки характеризуются относительно малой глубиной течения по сравнению с его шириной, а также значительной протяженностью. С одной стороны, их нельзя (или не хотелось бы) рассматривать как одномерные течения, но не стоит считать и вполне трехмерными объектами. Т.е. в основу упрощения модели и понижения ее размерности могут быть положены геометрические параметры области течения. Отношение между характерной глубиной и характерной шириной речного русла колеблется в пределах от 0.1 до 0.005, что может быть основой применения методов малого параметра.
- Естественные водотоки всегда являются турбулентными, поэтому любая, даже самая упрощенная модель должна учитывать турбулентность течения. Однако из-за недостаточности экспериментальных данных можно ограничиться простейшими моделями турбулентности. При этом необходимо иметь возможность калибровки модели по имеющимся данным наблюдений.
- Предлагаемая упрощенная модель должна правильно описывать простые частные случаи, решения для которых известны и не вызывают сомнений (например, ламинарное течение).

Отметим, что в отличие от распространенных осредненных моделей, предлагаемая модель учитывает пространственную структуру течения, что позволяет исследовать влияние формы дна и береговой линии русла, а также некоторых внешних факторов (например, воздействие ветра) на особенности течения в русловом потоке.

Результаты проведенных вычислительных экспериментов позволяют утверждать, что используемая редуцированная модель мелкого протяженного слабо искривленного руслового потока вполне адекватно описывает его гидродинамику и может применяться для моделирования природных водотоков.

## Математическое моделирование распространения паразитарного заболевания — дирофляриоза

**Загребнева А. Д.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
azagrebneva@sfnedu.ru

В последние годы наблюдается увеличение количества случаев заражения дирофиляриозом — паразитарным заболеванием, вызываемым круглыми червями *Dirofilaria*. Особенно от дирофляриоза страдают домашние животные — собаки и кошки. В запущенном состоянии заболевание приводит к летальному исходу. У человека дирофляриоз протекает в более легкой форме: личинки селятся под кожей или слизистыми и в глазном яблоке, вызывая их поражение. Заражение болезнью происходит через укусы комаров, заражённых инвазионными личинками дирофилярий. Источником заражения комаров обычно являются больные собаки, реже кошки. Человек не может быть источником заболевания, так как в нем поселяется особь только одного пола (чаще женского), неспособная сама произвести потомство. В данном исследовании предложена математическая модель эпидемического распространения дирофляриоза, на ее основе имитируются меры борьбы с заболеванием и оцениваются их эффективность.

Для описания распространения болезни рассмотрены взаимодействия между двумя популяциями: комаров — переносчиков заболевания, и собак — носителями болезни. Переменными математической модели являются: общие численности собак  $D_T$  и комаров  $M_T$ , численности инфицированных собак  $D_I$  и комаров  $M_I$ , численность здоровых собак  $D_H$ . Развитие болезни описано системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \dot{D}_T = a - cD_H - dD_I + \sigma_1 \Delta D_T, \\ \dot{D}_H = a - cD_H - \alpha D_H M_I + \sigma_2 \Delta D_H, \\ \dot{D}_I = \alpha D_H M_I - dD_I + \sigma_3 \Delta D_I, \\ \dot{M}_T = b - fM_T + \sigma_4 \Delta M_T, \\ \dot{M}_I = \beta D_I M_H - fM_I + \sigma_5 \Delta M_I. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $a$  и  $b$  коэффициенты/функции рождаемости собак и комаров;  $c$ ,  $d$  и  $f$  коэффициенты смертности не инфицированных, больных собак и комаров соответственно;  $\alpha$  вероятность встречи здоровой собаки с инфицированным комаром;  $\beta$  вероятность встречи здорового комара с инфицированной собакой, а  $\sigma_i$  — коэффициенты блуждания особей в пространстве.

Рассмотрена ситуация однородного по пространству распределения популяций, т. е. при всех  $\sigma_i = 0$ . Найдены равновесия системы и проведен анализ их устойчивости. Показано, что равновесие, соответствующее свободному от болезни состоянию является неустойчивым, а равновесие, когда уровень заболевания имеет постоянное значение, устойчиво. Для неоднородно распределенных популяций проведены вычислительные эксперименты, имитирующие различные стратегии борьбы с распространением болезни. Результаты представлены в докладе. Для численного решения системы (1) использовался метод конечных разностей.

Автор выражает благодарность В. Н. Говорухину за внимание к работе.

## Влияние краевых дислокаций на нелинейный изгиб прямоугольного бруса из микрополярного материала

Зеленина А. А.<sup>1</sup>, Зубов Л. М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Ростовский государственный университет путей сообщения*

<sup>2</sup>*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
a.zelenina@gmail.com

В докладе исследована задача нелинейной теории упругости о сильном изгибе прямоугольного бруса с учетом двух распространенных элементов микроструктуры твердых тел: микронеоднородности и дислокационных дефектов. Микронеоднородность учитывается при помощи модели микрополярного тела, т. е. среды с моментными напряжениями, а дефекты рассматриваются в рамках нелинейной континуальной теории непрерывно распределенных дислокаций (см. Зубов Л. М. Континуальная теория дислокаций и дисклинаций в нелинейно упругих микрополярных средах // Изв. РАН. МТТ. 2011. №3. С. 18–28). Система разрешающих уравнений микрополярной упругой среды с дислокациями при отсутствии массовых сил и моментов состоит из уравнений равновесия для напряжений и уравнения несовместности (1), а также определяющих соотношений (2)

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{G} + (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{D})_{\times} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{C} = \boldsymbol{\alpha} \quad (1)$$

$$\mathbf{D} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{G} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{L}} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{H}^T, \quad \mathbf{L} = \frac{1}{2} \mathbf{I} \operatorname{tr}[\mathbf{H} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{H})^T] - \mathbf{H} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{H})^T \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{G}$  — тензоры напряжений и моментных напряжений типа Пиолы,  $\mathbf{C}$  — тензор дисторсии,  $\mathbf{H}$  — тензор микроповорота,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор,  $\mathbf{E}$  — мера деформации,  $\mathbf{L}$  — тензор изгибной деформации,  $W(\mathbf{E}, \mathbf{L})$  — удельная энергия деформации,  $\boldsymbol{\alpha}$  — тензор плотности дислокаций, удовлетворяющий условию соленоидальности  $\operatorname{div} \boldsymbol{\alpha} = 0$ . Тензор  $\boldsymbol{\alpha}$  считается заданной функцией координат, а неизвестными функциями в системе уравнений (1), (2) являются тензорные поля дисторсии  $\mathbf{C}$  и микроповоротов  $\mathbf{H}$ . Решение задачи изгиба прямоугольного бруса  $0 \leq x_1 \leq l$ ,  $0 \leq x_2 \leq h$  ищется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= C_1(x_2) \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + C_2(x_2) \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{H} = \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3 \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{i}_1 \cos \beta x - \mathbf{i}_2 \sin \beta x, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_1 \sin \beta x + \mathbf{i}_2 \cos \beta x, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\beta = \text{const}$ , а  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  — координатные орты. Благодаря подстановке (3) задача изгиба сведена к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае шестиконстантной модели физически линейного микрополярного изотропного тела получено явное точное решение указанной краевой задачи для краевых дислокаций, распределенных с заданной плотностью  $\boldsymbol{\alpha} = \eta(x_2) \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_1$ , где  $\eta(x_2)$  — произвольная функция. Исследовано влияние дислокаций на напряженное состояние бруса и на зависимость изгибающего момента от параметра  $\beta$ , которая характеризует нелинейное сопротивление бруса при его изгибе. Установлено, что при  $\eta(x_2) = \text{const} = \beta$  в теле реализуется чисто моментное состояние, в котором силовые напряжения тождественно равны нулю.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-01492).

Динамическая и квазистатическая неустойчивость решения  
задач о скользящем термофрикционном контакте

Зеленцов В. Б., Митрин Б. И., Айзикович С. М.

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*

boris.mitrin@gmail.com

Теоретическое исследование скользящего термофрикционного контакта осуществляются в рамках задач нестационарной теории термоупругости в динамической или в квазистатической постановке, причем в квазистатической постановке пренебрегают силами инерции в уравнении теории упругости, что существенно упрощает решение задачи. При полубесконечных размерах контактирующих тел решение таких задач, как правило, устойчиво. Если же контактирующие тела имеют покрытия (защитные, антифрикционные, демпфирующие и др.), возникают параметрические области неустойчивости решений.

Рассматривается задача термоупругости в динамической и квазистатической постановке о скольжении с постоянной скоростью  $V$  жёсткой полуплоскости по поверхности ( $x = h$ ) упругого покрытия, жестко сцепленного с недеформируемым основанием ( $x = 0$ ), которая внедряется в покрытие и деформирует его вдоль вертикальной оси  $x$  по закону  $u(h, t) = -\Delta(t)$ , где  $u(x, t)$  — смещения в покрытии. Движущаяся полуплоскость теплоизолирована, а тепловой поток  $K\partial T(h, t)/\partial x = -fV\sigma(x, t)$ , возникающий за счет кулоновского трения в области контакта, направлен в покрытие (здесь  $K$  — коэффициент теплопроводности,  $T(x, t)$ ,  $\sigma(x, t)$  — соответственно, температура и напряжения в покрытии,  $f$  — коэффициент трения). На основании покрытия температура  $T(0, t) = 0$ .

Точное решение поставленной задачи для каждой рассмотренной постановки построено в виде контурных квадратур обратного преобразования Лапласа, а после их вычисления — в виде бесконечных функциональных рядов по собственным функциям (Зеленцов и др., Вестник ДГТУ, 2014, Т. 14, № 4, С. 17–29). Точное решение позволило установить общность и различие устойчивых и неустойчивых решений задачи в динамической и в квазистатической постановке. Установлено, что область неустойчивости решений задачи в квазистатической постановке является подобластью общей области неустойчивости в динамической постановке. В отсутствие сведений об области неустойчивости решений в динамической постановке существует риск использования устойчивых квазистатических решений в области общей динамической неустойчивости при инженерных расчетах может привести к возникновению нештатных ситуаций при эксплуатации изделия.

Работа поддержана грантами РФФИ 14-08-91166-ГФЕН\_a, 13-08-01435-а.

Об особенностях функций влияния  
в двумерных задачах упругой диффузии для слоя

**Земсков А. В.<sup>1</sup>, Бугаев Н. М.<sup>1</sup>, Тарлаковский Д. В.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*

<sup>2</sup>*Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова*  
azemskov1975@mail.ru

Рассматривается двумерная нестационарная задача упругой диффузии для однородного изотропного слоя. Физико-механические процессы в среде описываются геометрически линейной моделью связанной упругой диффузии без учёта температурных эффектов, которая включает в себя два уравнения движения и одно уравнение массопереноса. На границах заданы нормальные перемещения и касательные нагрузки, а также диффузионные потоки. В начальный момент времени слой находится в невозмущённом состоянии.

Решение ищется в интегральной форме, представляющую собой свёртку функций Грина с правыми частями граничных условий. Для этого осуществляется редукция к нулевым граничным условиям. Далее последовательно используется интегральное преобразование Фурье по одной из пространственных координат, разложение в ряд Фурье по второй пространственной координате и преобразование Лапласа по времени. В результате исходная задача сводится к последовательности систем из трёх линейных алгебраических уравнений относительно изображений Фурье—Лапласа искомым функций. Из этих уравнений получаем функции Грина рассматриваемой задачи в изображениях Фурье—Лапласа. Задача обращения трансформант Лапласа сводится к обращению рациональных функций, которая решается с помощью второй теоремы разложения операционного исчисления.

Трансформанты Фурье обращаются численно с помощью квадратурных формул и эту процедуру удобнее всего совместить с вычислением свёрток функций, стоящих в правых частях граничных условий с функциями Грина. Как правило такая задача решается численно. Сложность заключается в том, что функции влияния имеют особенность по времени в окрестности нуля. Несмотря на то, что эта особенность является интегрируемой, её наличие влечёт за собой плохую сходимость рядов Фурье при малых временах, что приводит к резкому увеличению количества членов ряда необходимых для получения решения с заданной точностью и к увеличению трудоёмкости вычислений. Для устранения этой проблемы предлагается выделить указанную особенность в виде самостоятельного слагаемого и отдельно проинтегрировать. В ряде случаев это можно сделать аналитически, так как ядро свёртки по времени представляет собой обобщённый тригонометрический многочлен. Для оставшейся хорошо сходящейся части ряда можно использовать квадратурные формулы для вычисления свёрток.

Численные расчёты для модельных примеров выполнены в пакете Maple 17.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-08-01161 А)

## Моделирование межфазного слоя армированных композитов с помощью градиентной теории упругости

**Зиборов Е. Н., Гультияев В. В.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
ziboroven@gmail.com

Работа посвящена моделированию адгезионного взаимодействия в структуре однонаправленного армированного композитного материала на контактной поверхности матрица — волокно. Моделирование осуществлено с помощью двух подходов. В первом рассматривается градиентная теория упругости (Lurie, S.A. *Advanced theoretical and numerical multiscale modeling of cohesion/adhesion interactions in continuum mechanics and its applications for filled nanocomposites* / Lurie, S.A., Volkov-Bogorodsky, D.B., Zubov, V.I., Tuchkova, N. P. // *Comp. Mat. Science* – 2009. –V. 45– I. 3– P. pp. 709-714.; Лурье С. А., Миронов Ю. М., Нелюб В. А., Бородулин А. С., Чуднов И. В., Буянов И. А., Соляев Ю. О. Моделирование зависимостей физико-механических характеристик от параметров микро- и наноструктуры полимерных композиционных материалов, DOI: 10.7463/0612.0431339). Здесь задача о деформировании однонаправленного армированного композиционного материала сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, нарушение адгезии моделируется заданием некоторой эффективной его длины. Краевая задача решается аналитически в Maple.

Во втором подходе рассматривается линейная теория упругости и нарушение адгезии моделируется расслоением между армирующими волокнами и матрицей. решение задачи проводится в конечно-элементном пакете ANSYS.

Проведены численные эксперименты для образца материала составные компоненты которого: стекловолокно — армирующий материал (процентное содержание в материале 65%, диаметр волокон 7 мкм) и эпоксидная смола (связующий компонент, в материале 35%). Данный материал в настоящее время применяется в авиационной промышленности, в частности при создании лонжеронов несущего винта вертолета.

Моделировалось нарушение адгезии в пределах от 0 до 75% площади контактной поверхности матрица—волокно; задача рассматривалась при различных процентных соотношениях компонентов. Полученные результаты расчета напряжений и деформации модели линейной теории имеют расхождение с решением задачи методом градиентной теории в пределах от 5% до 30%, в зависимости от размеров образцов и процентного содержания компонент и величины нарушения адгезионного взаимодействия. Результаты были представлены в виде графиков распределения деформации и напряжений вдоль радиусов компонентов КМ определенных по представленной градиентной теории упругости, а также аналогичные графики в зависимости от процентного содержания компонентов

Кроме этого численно реализована методика, предложенная в цитируемых выше работах по определению эффективного модуля упругости композитного материала методами градиентной теории упругости, осуществлена оценка воздействия величины зоны адгезионного взаимодействия на эффективный модуль упругости материала, а также определение величины этой зоны с помощью представленной методики.

## Энергия диссипации и процесс генерации тепла в вершине движущейся трещины

**Зимин Б. А.<sup>1</sup>, Судьенков Ю. В.<sup>2</sup>, Свентицкая В. Е.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН*

<sup>2</sup>*Санкт-Петербургский государственный университет*

*vsvent@yandex.ru*

Особый интерес в разрушении представляет механизм диссипации энергии при развитии трещины в аморфных материалах. Экспериментальные измерения потока энергии в кончике движущейся трещины указывают на то, что энергия разрушения (то есть энергия, необходимая для создания единицы свободной поверхности) является функцией скорости движения трещины, а основная часть запасённой энергии при разрушении обращается в тепло. В настоящее время существует несколько моделей, которые объясняют зависимость энергии разрушения от скорости движения трещины (теории К. Ravi-Chandrar и W. G. Knauss и теории Л. В. Freund, Б. В. Костров, Л. В. Никитин, Л. М. Флитман). Не вызывает сомнения, что динамика развития трещины связана с зоной предразрушения перед фронтом магистральной трещины — зоной пластического течения и/или микроповреждений, возникающих на траектории движения магистральной трещины за счёт интенсивных полей напряжений в ее вершине. Увеличение потока энергии в кончике трещины вызывает увеличение числа микроповреждений, а взаимодействие нестационарных полей напряжений микроразрушений и полей напряжений, формируемым фронтом магистральной трещины приводит к динамической неустойчивости движущейся трещины. Таким образом, колебания скорости трещины пропорциональны потоку энергии в ее вершине, то есть являются результатом динамического переноса энергии между магистральной трещиной и локальными микроразрушениями, что подтверждается характером теплового излучения и акустической эмиссии. В экспериментах на ПММА мы получили три области разрушения. Причём, зеркальная поверхность трещины соответствует медленному росту трещины, область с малой шероховатостью соответствует повышению скорости трещины, а область с большей шероховатостью соответствует предельной скорости трещины, которая приблизительно равна половине скорости Рэлея. Пока скорость трещины мала, тепло возникающее при деформации в вершине трещины, успевает отводиться и движение трещины является изотермическим. По мере роста скорости трещины выделяющееся тепло не успевает отводиться и происходит переход к адиабатическому движению трещины. Регистрация движения трещины осуществлялась стрик-камерой K008 по методу щелевой развертки изображения. Синхронизация камеры производилась сигналом с фотоприемника, регистрирующего изменение интенсивности излучения полупроводникового лазера при старте и распространении трещины. Для получения дополнительной информации о поведении трещины экспериментальные исследования были дополнены методикой инфракрасной (ИК) фотометрии для измерения теплового излучения вершины распространяющейся трещины и методом динамической фотоупругости с фотоэлектрической регистрацией. Аналитическое выражение для возрастания потока тепла получено на основе энергетического баланса в кончике движущейся трещины.

## Биомеханический анализ расширяющегося стержня Fixion

**Иванов Д. В.<sup>1</sup>, Барабаш А. П.<sup>2</sup>, Барабаш Ю. А.<sup>2</sup>**<sup>1</sup>*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*<sup>2</sup>*Саратовский НИИ травматологии и ортопедии*

ivanovdv@gmail.com

Остеосинтез блокируемыми интрамедуллярными стержнями является «золотым стандартом» при лечении диафизарных переломов нижней конечности человека. Однако, блокируемые стержни имеют ряд серьезных недостатков. В первую очередь, это сложность установки, вследствие чего пациент получает достаточно высокую дозу облучения радиацией. Во-вторых, система кость—фиксатор имеет высокую осевую жесткость, что не позволяет отломкам контактировать с необходимой величиной давления. В-третьих, блокирующие винты являются уязвимым местом с точки зрения возникновения критических напряжений и часто могут выходить из строя.

Современные расширяющиеся стержни, такие как Fixion, имеют ряд преимуществ перед стандартными блокируемыми стержнями. Они быстро устанавливаются и обеспечивают необходимую аутокомпрессию на стыке отломков. Тем не менее, исследования показывают их невысокую стабильность при крутильных нагрузках. Более того, такие стержни существенно дороже стандартных.

Многие исследователи занимаются вопросами клинических исследований расширяющегося фиксатора. Однако, биомеханических работ и работ, посвященных численному моделированию стержня Fixion, встречается крайне мало. Не найдено ни одной работы, где бы расширяющийся стержень сравнивался со стандартным или другими фиксаторами с точки зрения биомеханики.

Данная работа посвящена численному моделированию системы кость—расширяющийся фиксатор под действием трех видов нагрузок в случае переломов диафиза бедра двух типов: оскольчатый с центральным осколком и косой.

Исследованы геометрические характеристики расширяющегося интрамедуллярного фиксатора Fixion, применяющегося при остеосинтезе переломов бедренных костей. Численно исследована система кость—фиксатор под действием трех типов нагрузок. Изучено два вида перелома диафиза бедра. Проведено сравнение напряженно-деформированного состояния системы кость—фиксатор для расширяющегося и стандартного стержней.

На внутренней поверхности фиксатора были обнаружены очаги коррозии. Выявлено, что расширяющийся фиксатор Fixion обеспечивает меньшую (на 20–30%) осевую жесткость системы кость—фиксатор по сравнению со стандартным стержнем. Жесткость при скручивании оказалась существенно выше жесткости системы со стандартным стержнем. Результаты расчетов показали неравномерность контактного давления на стыке между костными отломками. Численные данные хорошо согласуются с литературными.

Интрамедуллярный фиксатор Fixion показал высокую устойчивость ко всем трем исследованным нагрузкам. Коррозия на внутренней стенке фиксатора может говорить о его относительно малой сопротивляемости солевому раствору.

«Парадоксальные» компьютерные эксперименты  
с моделями сложных биосистем

**Ильичев В. Г.**

*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*  
vitaly369@yandex.ru

В докладе обсуждается действие донского стока на нижние трофические уровни экологической системы (фитоценозы) Азовского моря. В результате модельного исследования обнаружен ряд “странных” явлений. Представляется актуальным поиск причин, вызывающих данные события. Приведем примеры причинного анализа, выполненного на основе компьютерного “асимптотического” анализа. Как правило, многие из предлагаемых экспериментов не могут быть реализованы в природе, однако в рамках математической модели это вполне реализуемо.

1. Значительное сокращение объема донского стока “автоматически” вызывает рост отношения  $NPM = (\text{минеральный азот}) / (\text{минеральный фосфор})$  в морской воде. Сложность соответствующего объяснения обусловлена одновременным протеканием гидрологических (изменение массообмена) и биологических (перестройка состава водорослей из-за роста солености) процессов при деформации донского объема. Предлагается следующий метод выделения данных факторов в “чистом” виде. Так, зафиксируем соленость и будем сокращать сток, тогда в фитоценозе действуют только гидрологические процессы. Напротив, зафиксируем объем стока и начнем изменять соленость, теперь “работают” одни биологические процессы. В результате таких расчетов было выяснено, что при малом объеме стока доминируют гидрологические факторы, всегда вызывающие рост  $NPM$ .

2. При вариации органических форм азота и фосфора в донском стоке обнаружено, что отношение  $NPO = (\text{органический азот}) / (\text{органический фосфор})$  в водах Таганрогского залива (ТЗ) и собственно Азовского моря (СМ) ведет себя совсем по-разному. Так, в первом (малом) районе оно сильно деформируется, а во втором (большом) районе неожиданно слабо изменяется. Почему это происходит: может быть все дело в уникальности самого фитоценоза СМ или в уникальности каскада фитоценозов ТЗ  $\rightarrow$  СМ? В этой связи в модели были реализованы все варианты перестановок взаимодействующих фитоценозов (с сопутствующими им объемами районов: ТЗ  $\rightarrow$  ТЗ, СМ  $\rightarrow$  ТЗ, СМ  $\rightarrow$  СМ).

После проведенных расчетов обнаружено, что стабилизация величины  $NPO$  наблюдается в больших районах независимо от находящегося там фитоценоза. Оказалось, что это явление связано с природой происхождения органического вещества в водоеме. Оно бывает двух типов: аллохтонное (заносимое с речным стоком и др.) и автохтонное (продуцируемое за счет отмерших водорослей). В больших районах превалирует автохтонная органика, в которой соотношение азот/фосфор находится в достаточно узких пределах. Поэтому здесь возникает достаточно устойчивое значение  $NPO$ .

## Численное исследование действия ударной силы на торец призматического тела

**Ипатов А. А., Игумнов Л. А., Литвинчук С. Ю., Фокина Т. А.**  
*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского*  
igumnov@mech.unn.ru

Рассмотрены задачи о действии вертикальной силы на лицевые поверхности упругих полупространств. Гранично-элементная сетка строится с учетом двух плоскостей симметрии. Приведены результаты, полученные с использованием метода квадратур сверток и метода Дурбина. ГЭ-схемы дают близкие результаты. Дано сравнение с ГЭ-результатом из научной литературы. Показано, что ГЭ-решение других авторов дает заниженный результат по амплитуде волны Рэлея, а также завышенный нефизичный результат по падению амплитуды сразу за фронтом волны Рэлея.

Использование визуализации позволяет показать распространение волн по координатам в фиксированные моменты времени с наглядной демонстрацией зарождения и продвижения фронтов волн. Исследовано влияние продолжительности действия нагрузки на форму отклика поверхностной волны.

Рассмотрены решения задач для вязкоупругих полупространств. Проведены исследования влияния вязкости на характер поведения функции перемещения, когда полупространство описано различными вязкоупругими моделями: модели Максвелла, Кельвина-Фойгта, стандартного вязкоупругого тела и слабосингулярного степенного ядра.

Решались задачи для полупространства с полостями (сферическая и кубическая). Гранично-элементная сетка строится с учетом двух плоскостей симметрии. Приведены графики перемещений во времени, полученные в результате численных ГЭ-расчетов методом Дурбина. Приведено исследование перемещений для полупространства с полостью, при удалении (15 м, 19 м, 21,25 м, 23,5 м) от источника нагрузки при хевисайдовом нагружении. Рассмотрена задача о действии давления внутри сферической полости, расположенной в упругом полупространстве.

Рассмотрена задача о действии вертикальной хевисайдовой силы на поверхность пороупругого полупространства, свойства материала которого описываются полной моделью Био сжимаемого материала. Для решения задачи использовалась гранично-элементная модель, построенная для решения задач для упругого полупространства. Представлен отклик граничных перемещений на расстоянии 20 м от места действия силы. Исследовано влияние расстояния (соответственно 6, 12, 20 м) от места действия силы на форму и амплитуду отклика давления. Продемонстрирован вклад волны Рэлея в отклик перемещений и давлений на границе пороупругого полупространства.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 15-08-02814-а; 15-08-02817-а).

## Исследование автоколебаний и стационарных решений в системе Рэлея с диффузией

**Казарников А. В., Ревина С. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
kazarnikov@gmail.com

Рассматривается система Рэлея с диффузией:

$$\begin{cases} v_t = \nu_1 \Delta v + w \\ w_t = \nu_2 \Delta w - v + w - w^3 \end{cases} \quad (1)$$

где  $v = v(x, t)$ ,  $w = w(x, t)$ ,  $x \in D$ ,  $t > 0$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область,  $\mu \in \mathbb{R}$  — управляющий параметр,  $\nu_1, \nu_2 > 0$  — фиксированные параметры, отвечающие за вязкость.

Целью данной работы является построение асимптотики решений системы уравнений в частных производных (1), ответвляющихся от тривиального решения при изменении управляющего параметра  $\mu$  и фиксированном коэффициенте диффузии  $\nu = \nu_1 = \nu_2$ . Рассмотрены однородные краевые условия Дирихле, Неймана, а также смешанные краевые условия. Для получения вторичных решений применен метод Ляпунова—Шмидта в форме, развитой в работах В. И. Юдовича. Метод применим к дифференциальным уравнениям, заданным как в конечномерных, так и бесконечномерных пространствах, в том числе к уравнениям Навье—Стокса.

В настоящей работе сначала система (1) записывается в операторной форме. Построена абстрактная схема, найдены критические значения параметра  $\mu$ , построены первые члены асимптотики, выведены формулы для общего члена разложения. Показано, что в случае краевых условий Неймана для всех  $n$  в системе присутствует пространственно-однородный автоколебательный режим. Установлено, что выражения для членов асимптотики не зависят от формы рассматриваемой области  $D$ .

Для подробного исследования динамики системы при  $\mu > 1$  и  $\nu_1 \neq \nu_2$  был проведен ряд численных экспериментов. Для вычислений применялись пакеты Maple и MATLAB, а также программный комплекс на языке C++. При проведении вычислений была применена технология NVIDIA CUDA v. 7.0, что позволило существенно ускорить процесс расчёта. Система была исследована различными типами численных методов: методами сеток, прямых, а также методом Галеркина. Результаты всех численных экспериментов полностью согласуются друг с другом. Для случая краевых условий Неймана в численных экспериментах были обнаружены нетривиальные стационарные решения, наблюдаемые лишь для небольшого подмножества начальных условий. Также было установлено, что в данном случае пространственно-однородный автоколебательный режим наблюдается при всех значениях  $\mu > 0$ .

Конечно-элементный анализ модельной системы чрескостного остеосинтеза, основанной на аппарате Илизарова, при внешних воздействиях, имитирующих движение человека при ходьбе

**Каргин М. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

misha\_kargin@list.ru

Разработанные Г. А. Илизаровым и его школой методики чрескостного остеосинтеза при различных видах переломов позволяют достичь точной репозиции костных отломков с устранением всех видов смещений и восстановлением конгруэнтности поверхностей костей, а также стабильной фиксации на период консолидации фрагментов костной ткани. Стабильная фиксация обеспечивает возможность ранних активных движений поврежденной конечности, что является профилактикой возникновения деформирующего артроза и других возможных негативных процессов.

Вариабельность компоновок аппарата Илизарова и неповторимость биомеханических особенностей повреждённых сегментов у разных индивидуумов требуют поиска методов определения прочностных характеристик регенерата и расчёта неразрушающих нагрузок на него в клинических условиях.

В данной работе объектом исследования являлась биомеханическая модель, состоящая из имитатора кости и аппарата Илизарова, основная цель работы состояла в определении НДС костной ткани в месте перелома (плоскость перелома моделировалась под различными углами к плоскости, проходящей через ось имитатора кости) на различных этапах консолидации костной ткани, при варьировании внешних воздействий на кость, связанных с периодическими нагрузками, имитирующими движение при ходьбе человека.

При проведении анализа рассматриваемой системы использовалась техника метода конечных элементов, в программном комплексе Ansys строились пространственные конечно-элементные модели и решались статические и динамические задачи теории упругости.

Разработанная конечно-элементная модель позволяет задавать ортотропные упругие свойства материалов имитатора кости, вводить неоднородные жесткостные свойства регенерирующей ткани вблизи места перелома, изменять базовые геометрические и механические характеристики модели и определять различные внешние воздействия.

В результате проведения постпроцессорной обработки характеристик, полученных из конечно-элементных решений задачи, для некоторых наборов значений механических свойств костной мозоли, в зависимости от периодов регенерации, были определены первые собственные и резонансные частоты системы, построены амплитудно-частотные характеристики в различных точках имитатора кости и проведен анализ переходных процессов при заданных внешних воздействиях на имитатор кости, связанных с периодическими нагрузками, имитирующими движение при ходьбе человека и условиях закрепления.

Дальнейшее улучшение модели может быть направлено на адаптацию используемых подходов для проведения расчетов, учитывающих индивидуальные особенности структуры кости и геометрии места перелома у конкретного пациента.

Течение крови в артериях и венах:  
квазирегулярная и хаотическая динамика

**Кизилова Н. Н.**

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина*

kizilova@univer.kharkov.ua

Течение крови по кровеносным сосудам является пульсирующим, при этом форма кривых давления  $P(t)$  и скорости  $V(t)$  кровотока в сечениях отдельных кровеносных сосудов, может служить для распознавания заболеваний, связанных с атеросклеротическими и возрастными дегенеративными изменениями состояния стенок артерий, наличия патологических сужений и расширений (стенозов и аневризм). Известно, что сердечный ритм имеет хаотическую динамику, причем мера хаотичности, выраженная в величине энтропии, размерности Хаусдорфа или показателя Ляпунова, имеет важное диагностическое значения для оценки деятельности сердца. В данной работе приведен обзор математических моделей, описывающий сердце как хаотический генератор волн давления и скорости кровотока.

Для анализа использовались кривые  $P(t)$  и  $V(t)$ , зарегистрированные с помощью ультразвуковой диагностической аппаратуры (Siemens Acuson Ultrasound) в грудной аорте, плечевой и бедренной артериях и венах 20 молодых здоровых испытуемых, 20 испытуемых пожилого возраста, не обращавшихся с жалобами на состояние сердечно-сосудистой системы, и 20 пациентов кардиологического отделения с диагнозом гипертония. Кривые давление-скорость  $P(V)$  характеризуют динамику кровотока в соответствующей артерии. В начале систолы петля  $P(V)$  имеет практически линейный участок, наклон которого  $dP/dV$  с точностью до постоянной соответствует скорости распространения пульсовой волны и характеризует окружную жесткость стенки сосуда. Площадь, ограниченная петлей  $P(V)$ , характеризует работу сил давления по движению крови через сосуд. Степень вытянутости и наклон самой длинной оси петли  $P(V)$  характеризует состояние системы микроциркуляции.

У здоровых испытуемых петли  $P(V)$  имели сходную форму и практически не смещались от сокращения к сокращению. У здоровых испытуемых пожилого возраста наблюдался характерный разброс положения петли, что при фиксации  $\sim 100$  сокращений давало размытую картину  $P(V)$  с сохранением ее характерных особенностей. У большинства пациентов с гипертонией, а также у 30% здоровых испытуемых пожилого возраста кривые  $P(V)$ , зарегистрированные в конечностях, обнаружили хаотическую динамику, что подтверждается анализом фазовых кривых, а также вейвлет-анализом кривых  $P(t)$  и  $V(t)$  и расчетами экспоненты Ляпунова.

Предложена математическая модель сосудистого русла в виде последовательного соединения модифицированных нелинейных моделей Франка для центрального и периферического артериального и венозного русел. Задача сводится к нелинейному ОДУ 3-го порядка, для которого получено решение и исследовано влияние параметров модели. Показано, что хаотическая динамика проявляется при патологическом увеличении податливости периферических отделов (дилатация, извилистость, тромбоз глубоких вен).

Методы оптимизации расчетов  
термоупругих и электроупругих композиционных материалов

Кириллова Е. В.<sup>1</sup>, Сыромятников П. В.<sup>2</sup>, Диденко А. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Висбаден, Университет прикладных наук*

<sup>2</sup>*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*

*kirillova@web.de*

В рамках линейной теории термоэлектроупругости рассматриваются связанные пространственные термоупругие, электроупругие и термоэлектроупругие гармонические колебания многослойных композитов, представляющих собой пакеты анизотропных слоев с плоско-параллельными границами раздела. В ограниченной области на поверхности пакета слоев задаются механические, тепловые и электрические нагрузки, вне области задания нагрузок поверхность механически свободна, термоизолирована и электрически закорочена (электрическое поле вне пакета слоев отсутствует). Рассматриваются различные варианты задания тепловых и электрических нагрузок на внешних границах пакета слоев.

В работе используются представления решений краевых задач теории термоэлектроупругости в виде двукратных контурных интегралов Фурье от произведения символов Фурье матриц-функций Грина пятого порядка и расширенного вектора механических, тепловых и электрических нагрузок.

Для оптимизации вычислений краевых задач термоэлектроупругости применимы, в основном, те же методы, что и для чисто упругих и термоупругих задач, однако, увеличение размерности диктует необходимость повышения их эффективности, разработки новых модификаций методов, использующих специфику электроупругих и термоэлектроупругих задач в различных постановках.

Для связанных задач термоэлектроупругости основной проблемой является увеличение размерности задачи, что на порядок увеличивает объем и время вычислений. Разработанные ранее для упругих и термоупругих композитов методы ускорения вычислений контурных интегралов и подинтегральных функций были адаптированы и значительно модифицированы для термоэлектроупругого случая.

Были модифицированы метод вычисления интегралов на основе теории вычетов, метод прямого вычисления контурных интегралов, интерполяционные сетки и схемы для аппроксимации матриц-функций в ближней зоне, асимптотические представления матриц-функций Грина в дальней зоне, основанные на перечисленных алгоритмах методы расчета и асимптотического уточнения интегралов.

С помощью разработанных методов проведена серия модельных и тестовых расчетов связанных механических, тепловых и электрических полей, вызываемых поверхностными и внутренними гармоническими механическими, тепловыми и электрическими источниками различной конфигурации.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края 13-01-96511-р-юг-а.

## Перспективы использования нанотехнологий для повышения адаптационных способностей декоративных растений

**Кириллова И. М.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*  
irina0465@mail.ru

Растения являются весьма перспективной технологической платформой, благодаря тому, что способны к самовосстановлению, экологически стабильны и умеют сами себя обеспечивать водой и питанием.

Однако декоративные растения очень уязвимы к воздействиям неблагоприятных факторов, под действием которых в растениях возникает напряженное состояние, которое характеризуется отклонением от нормы — стрессом. Стресс у растений могут вызвать недостаточная или избыточная влажность, освещенность, температура, промышленные отходы, возбудители болезней, вредители, а также растения-конкуренты. Поэтому для эффективного выращивания декоративных растений важна не только их потенциальная продуктивность, но и способность противостоять и адаптироваться к различным стрессовым ситуациям.

Последние достижения в области нанотехнологий и производства наноматериалов говорят о том, что применение нанопрепаратов в растениеводстве, и в частности цветоводстве, позволит повысить адаптационные способности декоративных растений и увеличить их продуктивность.

Создание биостимуляторов и микроудобрений, действие которых основано на активном проникновении микроэлементов в растение за счет наноразмера частиц и их нейтрального (в электрохимическом смысле) «статуса», позволят повысить холодостойкость, выносливость к жаре и засухе, помогут благополучно выйти из стрессовых погодных ситуаций (возвратные заморозки, резкие перепады температуры и т. д.) и будут усиливать защитные функции растений к болезням и вредителям.

Сегодня весьма перспективным является разработка ДНК-технологии, которые позволят выявить гены, ассоциированные с хозяйственно-ценными признаками, устойчивости к стрессам, инфекционным болезням. Речь идет о создании устройств с использованием биологических макромолекул в целях изучения или управления биологическими системами.

Для повышения адаптивности культурных растений к внешним негативным факторам, получения полноценных и здоровых всходов, роста и развития растений, повышение их продуктивности и качества семян необходимо создание нанотехнологий, отличающихся лабильностью и мобильностью состава и свойств.

При этом целесообразно применить подход, позволяющий использовать природные системы адаптации, заложенные в самих растениях, которые нередко содержат необходимые ингредиенты для защиты от воздействия окружающей среды, что позволит создать дополнительную устойчивость и надежность самих растительных организмов к стрессам.

Длинноволновая асимптотика  
задачи устойчивости двумерных течений с нулевым средним

**Кириченко О. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

olya-splash-1@mail.ru

Рассматривается двумерное  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ , периодического по пространственным переменным  $x_1, x_2$  с периодами  $\ell_1$  и  $\ell_2$  соответственно.

Такое движение описывается системой уравнений Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где  $\nu$  — безразмерная вязкость.

В качестве краевых условий задается условие периодичности поля скорости  $\mathbf{v}$  по пространственным переменным  $x_1, x_2$  с периодами  $\ell_1, \ell_2$ . Период  $\ell_1$  будем считать равным  $2\pi$ , а отношение периодов характеризовать волновым числом  $\alpha \ll 1$ :  $\ell_2 = 2\pi/\alpha$ ,  $\alpha \rightarrow 0$ .

Средняя по пространственному прямоугольнику периодов скорость считается заданной

$$\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle = \mathbf{q}.$$

Строится длинноволновая асимптотика задачи устойчивости стационарного течения, когда основное поле скорости принадлежит классу течений, близких к параллельным

$$\mathbf{V} = (\alpha V_1(z), V_2(x)),$$

в предположении, что среднее скорости основного течения вдоль длинного периода равно нулю  $\langle V_2 \rangle = 0$ .

В настоящей работе сначала рассматриваются линейная спектральная задача. Получены условия, при которых происходит колебательная потеря устойчивости основного течения. Найдены первые члены длинноволновой асимптотики по параметру  $\alpha$  собственных значений, собственных функций, критического значения вязкости. Коэффициенты асимптотических разложений явно выражаются через некоторые вронскианы, а также интегральные операторы типа Вольтерра подобно тому, как это сделано в работе С. В. Ревинной (ЖВМиМФ, 2013 г.).

Для нахождения асимптотики ответвляющихся автоколебаний применяется метод Ляпунова—Шмидта в форме, развитой в работах В. И. Юдовича (ПММ, 1972 г.) Помимо линейной спектральной рассматривается линейная сопряженная задача. В заключение приведены примеры расчета поведения пассивной примеси для конкретных течений, а также дана предварительная визуализация ответвляющихся автоколебаний.

Результаты данной работы могут позволить в дальнейшем построить асимптотику  $k$ -го члена подобно тому, как это было сделано для сдвиговых течений, а также вывести формулы общего члена асимптотики автоколебаний, ответвляющихся от основного течения.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Светлане Васильевне Ревинной за постановку задачи и внимание к работе.

## Использование аддитивных технологий для поддержки высокотехнологичных медицинских операций

**Козлов А. А.<sup>1</sup>, Гаврюшин С. С.<sup>1</sup>, Хрыков С. С.<sup>1</sup>, Поляков А. П.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

<sup>2</sup>*Москва, Федеральный медицинский исследовательский центр им. П. А. Герцена*  
kozlovaa.box@gmail.com

Аддитивные технологии, или технологии послойного синтеза, в настоящее время являются одними из наиболее динамично развивающихся среди других перспективных производственных процессов. Залогом успешного освоения данных технологий является их цельность, т. е. соединение их самих в определенную технологическую цепочку, которую можно переформатировать в зависимости от конкретной решаемой задачи.

В рамках работы строится новая технологическая цепочка подготовки, планирования и проведения высокотехнологичных операций в различных направлениях медицины (онкология, челюстно-лицевая хирургия, стоматология) за счет применения аддитивных технологий.

В условиях современной отечественной медицины хирурги челюстно-лицевой хирургии, реконструируя челюстно-лицевой аппарат пациента, сталкиваются с определенными проблемами, обусловленными индивидуальностью каждого пациента. При этом в большинстве случаев диагностические данные не всегда предоставляют возможность получить обширное представление имеющегося у пациента дефекта, перелома, аномалии или опухоли. Целью работы является оптимизация процесса лечения за счет предоставления врачу дополнительного инструмента, который позволяет производить строгий учет индивидуальных особенностей пациента на протяжении всего срока лечения. Достижение поставленной цели возможно с помощью внедрения в практику программно-аппаратного комплекса на базе аддитивных технологий.

Примером успешного внедрения и использования аддитивных технологий в медицине служит операция по одномоментному устранению сквозного комбинированного орофациального дефекта с использованием двух аутотрансплантатов, проведенная врачами ФГБУ «МНИОИ им. П. А. Герцена». Данная операция проводилась в России впервые. Была изготовлена индивидуальная модель нижней челюсти пациента для определения границ блоковой резекции, измерения длины костного фрагмента свободного реваскуляризированного малоберцового аутотрансплантата и вычисления всех необходимых параметров для установки аутотрансплантата в ортотопическую позицию с последующим остеосинтезом.

Изготовление и создание индивидуальной медицинской модели нижней челюсти пациента было выполнено в программно-аппаратном комплексе, являющимся собственной разработкой МГТУ им. Н. Э. Баумана. Твердотельная модель изготовлена методом послойного наплавления ABS-пластика на 3D-принтере, разработанном студентами МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Как показала практика, внедрение аддитивных технологий позволяет ускорить процесс хирургического лечения, повысить качество и доступность высокотехнологичной медицинской помощи, уменьшить риск неблагоприятного исхода операции и снизить расходы в расчете на одного пациента.

## Раздувание многослойного полого шара

**Колесников А. М.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

Alexey.M.Kolesnikov@gmail.com

Общее решение задачи Ляме о раздувании однородного полого шара, изготовленного из изотропного сжимаемого или несжимаемого материала, хорошо известно. Оно может быть представлено в явном виде, а для некоторых моделей нелинейно-упругого материала может быть записано в квадратурах.

В данной работе рассматривается решение задачи о радиально симметричной деформации многослойного полого шара. Каждый слой шара выполнен из изотропного несжимаемого нелинейно-упругого материала. Решение задачи может быть записано в следующем виде

$$R(r) = (R_0^3 + r^3 - r_0^3)^{\frac{1}{3}} \quad \text{или} \quad r(R) = (r_0^3 + R^3 - R_0^3)^{\frac{1}{3}},$$

$$f^k(r, R) = \frac{r^6 - R^6}{R^5 r^2} \left( \frac{\partial W^k}{\partial I_1} + \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial W^k}{\partial I_2} \right), \quad F^k(R) = \int_{R_{k-1}}^R f^k(r(P), P) dP,$$

$$\sigma_R(R) = -p_0 - 4 \sum_{i=1}^{k-1} F^i(R_i) - 4F^k(R), \quad \sigma_\Theta(R) = \sigma_\Phi(R) = \sigma_R(R) - 2Rf^k(r(R), R),$$

$$R \in [R_{k-1}, R_k], \quad R_k = R(r_k) = (R_0^3 + r_k^3 - r_0^3)^{\frac{1}{3}}, \quad k = 2, \dots, N.$$

Здесь  $r \in [r_0, r_N]$  — радиальная координата точки шара в отсчётной конфигурации,  $R$  — текущая координата, выражение для зависимости  $R = R(r)$  (или  $r = r(R)$ ) следует из условия несжимаемости,  $N \geq 2$  — количество слоёв,  $r_{k-1}$  и  $r_k$  — начальные внутренний и внешний радиусы слоя  $k$ ,  $R_{k-1}$  и  $R_k$  — внутренний и внешний радиусы деформированного  $k$ -го слоя,  $W^k(I_1, I_2)$  — удельная потенциальная энергия деформации  $k$ -го слоя,  $\sigma_R, \sigma_\Theta, \sigma_\Phi$  — напряжения в шаре,  $p_0$  — внутреннее давление. Для однородного шара решение сохраняет форму, если положить  $k = N = 1$  и в выражении для  $\sigma_R$  опустить слагаемое с суммой.

Для исследования задачи о раздувании рассмотрим граничные условия в виде

$$R(r_0) = R_0, \quad \sigma_R(R_N) = 0.$$

В такой постановке внутреннее давление легко представить через внутренний радиус деформированного полого шара  $R_0$ .

В работе проведён анализ напряжённо-деформированного состояния двух- и трёхслойного полого шара, слои которого изготовлены из неогукковского материала с разными материальными постоянными.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект 9.665.2014/К).

Анализ кинематики движения плечевого сустава для оценки  
возможности использования интрамедуллярной дистракции плеча  
имплантируемыми аппаратами

**Костандов Ю. А.<sup>1</sup>, Шиповский И. Е.<sup>2</sup>, Рамский Р. С.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Симферополь, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского*

<sup>2</sup>*Симферополь, Медакадемия им. С. И. Георгиевского КФУ им. В. И. Вернадского*

<sup>3</sup>*Клиническая больница №6 СМП г. Симферополя*

ipgd@yandex.ru

Трехмерное компьютерное моделирование движения плечевого сустава позволяет изучить изменения пространственных взаимоотношений его подвижных и неподвижных точек, что дает основание выделить те его точки, которые могли бы быть использованы для функционирования дистракционного аппарата при удлинении плеча. При этом необходимо обеспечить срабатывание храповикового механизма аппарата за счет попеременного натяжения гибких приводов во время наружной и внутренней ротации плеча и в наименьшей мере ограничить такие движения, как сгибание—разгибание, отведение—приведение. Способность гибких приводов изменять свою форму при сохранении постоянной длины позволяет им обеспечить движение штанги привода при полном натяжении во время ротации и гофрироваться при тех движениях в плече-лопаточном суставе, которые не приводят к срабатыванию храповикового механизма.

Для решения поставленной задачи необходимо знать значения расстояний между указанными точками в среднефизиологическом положении, диаметра головки плечевой кости, а также диапазонов движений в плече-лопаточном суставе. По результатам изучения томограмм 31 пациента была выбрана томограмма со средним значением диаметра головки плечевой кости, по которой и построена трехмерная модель плече-лопаточного сустава.

Выбор диаметра головки плечевой кости в качестве основного критерия для построения трехмерной модели определяется прямой зависимостью данного параметра от расстояний между изучаемыми точками плечевого сустава. После построения трехмерной модели, включающей в себя выбранные места крепления переднего и заднего лопаточных узлов привода, и подвижные точки — места фиксации мягких приводов к концам передней и задней штанг привода, а также центр вращения головки плечевой кости, производились вращения головки плечевой кости вокруг осей координат, каждое из которых соответствовала одному из характерных движений плечевой кости, и определялись расстояния между вышеуказанными точками.

Определены значения длины переднего и заднего гибкого привода, которые позволяют с запасом использовать их для безотказной работы храповикового механизма при наружной и внутренней ротации.

Основные виды движения плеча, которые необходимы для самообслуживания пациента в процессе дистракции (отведение и сгибание плеча) не приводят к увеличению расстояния между фиксированными и подвижными точками более, чем длина гибких приводов, что позволяет говорить об отсутствии ограничивающего действия привода дистракционного устройства на диапазон движений в плече-лопаточном суставе.

## Расчет напряженно-деформированного состояния системы металлоостеосинтеза

Костандов Ю. А.<sup>1</sup>, Шиповский И. Е.<sup>2</sup>, Рамский Р. С.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Симферополь, Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского

<sup>2</sup>Симферополь, Медакадемия им. С. И. Георгиевского КФУ им. В. И. Вернадского

<sup>3</sup>Клиническая больница №6 СМП г. Симферополя

ipgd@yandex.ru

Широкое внедрение в последние годы интрамедуллярного блокируемого остеосинтеза показало необходимость исследования допустимых значений компрессии при использовании металлоконструкций, т. е. расчета на прочность системы «металл—кость». В работе представлены результаты исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) системы металлоостеосинтеза плечевой кости при использовании внутрикостных компрессионно-блокируемых фиксаторов Блискунова.

Цель исследования — определить при этом допустимые значения компрессии.

Проведение натуральных экспериментов, требующих применения датчиков нагрузки или деформации, в случае металлоостеосинтеза выполнить в клинических условиях практически невозможно. Сложность конструкции системы «фиксатор—кость», требующая рассмотрения задачи в трехмерной постановке, и значительное различие физико-механических свойств ее элементов делают проведение модельных экспериментов чрезвычайно сложным и дорогостоящим, а адекватность получаемых результатов весьма сомнительной. С распространением и совершенствованием вычислительных пакетов все шире они применяются для решения обширного спектра задач механики твердого деформируемого тела, в том числе и математического моделирования в ортопедии и травматологии.

В связи с этим исследования проводились методом численного моделирования. При этом размеры и физико-механические свойства ее элементов (кости, костной мозоли, мышц, металлических элементов) были приняты такими же, как и натуральных элементов. Расчеты НДС модели системы металлоостеосинтеза («фиксатор—кость»), выполнялись для областей, наиболее опасных с точки зрения прочности. Рассматривалась модель конкретной системы «фиксатор—кость» при следующих параметрах: диаметре фиксатора 10 мм, диаметре блокирующих винтов 5 мм, диаметре компрессирующего винта 7 мм с шагом резьбы 1 мм,

Анализ результатов позволяет сделать следующие выводы:

1. Для рассмотренной модели конкретной системы «фиксатор—кость» допустимым является задание компрессии путем смещения компрессирующего винта на величину до 1,0 мм, что соответствует одному его полному обороту, после надежного введения в полный контакт отломков кости.

2. Исследование НДС системы «фиксатор—кость» целесообразно проводить для каждого типоразмера и дизайна фиксатора, что позволит исключить ряд технических осложнений и повысить качество остеосинтеза.

Косимметричная модель распространения популяций на пространственно-неоднородном ареале и сосуществование видов

Кругликов М. Г., Цибулин В. Г.

Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет  
mkruglicov@gmail.com

Анализируются сценарии сосуществования популяций для модели, описываемой нелинейными параболическими уравнениями с переменными коэффициентами. Рассматривается одномерная по пространственной координате  $x$  система относительно плотностей  $w_i = w_i(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, M$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} w_i = \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_i \frac{\partial w_i}{\partial x} \right] + \eta_i w_i \left( 1 - \frac{1}{P} \sum_{j=1}^M w_j \right). \quad (1)$$

Коэффициенты диффузии  $k_i$ , роста  $\eta_i$  и ресурс  $P$  являются положительными функциями переменной  $x \in [0, 1]$ . Исследуется кольцевая область, в начальный момент времени заданы распределения популяций. Проанализировано, при каких соотношениях на параметры система (1) обладает косимметрией и в ней имеется непрерывное семейство стационарных решений (Юдович В.И. // Мат. заметки. 1991, Т. 49. Вып. 5. С. 142–148).

Доказано, что для произвольной функции ресурса  $P(x)$  при постоянных коэффициентах роста  $\eta_i$  и выполнении соотношений  $k_i(x)\eta_j = k_j(x)\eta_i$ ,  $1 \leq i < j \leq M$  система (1) обладает линейной косимметрией

$$L = (\xi_1, \dots, \xi_M), \quad \xi_j = - \sum_{i=1}^{j-1} \eta_i w_i + \sum_{i=j+1}^M \eta_i w_i.$$

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что при выполнении условий косимметрии реализуется семейство стационарных распределений. При нарушении косимметрии в зависимости от параметров получается либо сосуществование популяций, либо вытеснение некоторых видов. Например, для системы, описывающей динамику двух популяций при постоянных коэффициентах диффузии, ресурсе  $P(x) = 1 - \mu \sin(2\pi x)$ , параметрах роста  $\eta_1(x) = \eta_{10} + \eta_{11}$ ,  $\eta_2(x) = \eta_{20} + \eta_{21} \sin(2\pi x)$ ,  $\eta_{10}k_2 = \eta_{20}k_1$  получается, что область значений параметров  $\eta_{11}$  и  $\eta_{21}$ , при которых реализуется сосуществование, находится только во втором и четвертом квадрантах плоскости  $(\eta_{11}, \eta_{21})$ . В случае функции ресурса  $P(x) = 1 - \mu \sin(4\pi x)$ , область сосуществования захватывает все четыре квадранта и содержит прямую  $\eta_{11} = 0$ . Этот метод может применяться так же для исследования популяций хищников и жертв (Будянский А.В., Кругликов М.Г., Цибулин В.Г. // Вестник ДГТУ, 2014, Т. 14. № 2. С. 28–35).

Исследование поддержано грантом РФФИ № 14-01-00470.

Квантово-химическое исследование механизмов образования оксида азота из производных фуроксана в живых системах

Курбатов С. В., Клецкий М. Е., Буров О. Н., Лисовин А. В.,  
Федик Н. С.

Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет  
kurbatov@sfedu.ru

Известно, что оксид азота NO является мультимодальным регулятором множества физиологических и патологических процессов в организме человека: обучение и запоминание, регуляция кровяного давления, мужская эрекция, пищеварение, борьба с инфекцией. NO также обладает цитотоксическими и цитостатическими свойствами. С нарушением биосинтеза и метаболизма NO связаны такие заболевания, как эссенциальная артериальная гипертензия, ишемическая болезнь сердца, инфаркт миокарда, первичная легочная гипертензия, бронхиальная астма, невротическая депрессия, эпилепсия, нейродегенеративные заболевания. Однако механизм его генерирования *in vivo* из экзогенных ксенобиотиков остается мало изученным как экспериментально, так и теоретически.

Имеющиеся данные свидетельствуют в пользу радикального пути отрыва NO и участия в этом процессе возбужденных электронных состояний, как, например, в случае S-нитрозоглутатиона (GSNO).

Простейшими моделями для такого процесса являются S-нитрозотиолы, фуроксаны и нитрозамины и изоэлектронный им нитрозопропан.

Для этой системы нами были осуществлены квантово-химические расчеты многодетерминантным методом CASSCF в базисе  $6-31+G^*$  с диффузными функциями на атомах N и O. По данным расчетов, фотохимический гомолиз связи C-NO является единственно возможным мономолекулярным процессом, что соответствует также механизму низкобарьерной фотодиссоциации в GSNO (благодаря аномальной длине связи длине связи S-N, равной 1.756 Å).

Особый механизм можно предложить для неферментативных процессов с участием фуроксанов. В этом случае глутатион атакует фуроксанный цикл с образованием в итоге каскада реакций NO. Стационарные точки на гиперповерхности потенциальной энергии получены в результате минимизации энергетического функционала. Проведенные нами расчеты показали, что энергетически предпочтительно протекание радикального, а не ионного процесса с образованием радикала NO.

Подобные процессы могут протекать также в интермедиатных состояниях 1,3-N-оксидных таутомерных перегруппировок, характерных для бензофуроксанов. Рассчитаны активационные барьеры и механизм таутомеризации нитробензофуроксанов, содержащих аннелированные циклы. Кинетические и активационные параметры рассчитанных процессов подтверждены методом динамического ядерного магнитного резонанса.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-13-00103).

## Техника построения локальных матриц магнито-термо-электроупругих материалов в ACELAN

Курбатова Н. В., Надолин Д. К.

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
nvk-ru@yandex.ru

В конечно-элементном пакете ACELAN реализован модуль, в рамках которого определяются эффективные характеристики композиционных материалов произвольного класса анизотропии.

В качестве определяющих соотношений рассматриваются линейные определяющие соотношения магнито-термо-электроупругости, а представительного объема — куб. В процессе разбиения куба на кубические конечные элементы каждый элемент случайным образом наделяется свойством либо пьезомагнитного материала, либо пьезоэлектрического, при этом неоднородность может быть также обусловлена изменением направления поля поляризации в зависимости от элемента.

Реализованный алгоритм выбора материала для элемента зависит от процентного соотношения каждого материала в представительном объеме и обеспечивает связность конечных элементов одинакового материала.

Решение серии краевых задач для представительного объема позволяет определить методами осреднения по объему эффективные характеристики полученной смеси-композита. Такие краевые задачи решаются методом конечных элементов на основе классических схем дискретизации. В рассматриваемом случае полагается элемент двенадцатиузловым и каждый узел содержит шесть неизвестных узловых характеристик: первые три — координаты вектора смещения, электрический потенциал, магнитный потенциал и температуру.

Реализованный подход позволяет рассматривать смеси различных анизотропных композитов с различным типом связности для физико-механических полей, в том числе, и частные случаи, пороупругого материала, пьезоэлектрического или пьезомагнитного.

Акцент данной работы делается на построении локальной матрицы элемента. Локальная матрица строится для максимального числа неизвестных в узле, а частные случаи получают функциональным редуцированием узловых неизвестных в соответствии со свойствами участвующих материалов. В пакете реализуется два подхода; первый позволяет получить элементы локальных матриц численно, второй - аналитически. Аналитический подход основан на использовании техники дискретного конечного автомата, позволяющей упростить не только процедуру вычисления подынтегральных выражений, но и интегрирования по элементу.

В результате предлагаемого подхода в пакете ACELAN разработана модель дизайна многокомпонентного композиционного материала для определения его физических свойств в рамках эффективных модулей.

## Нечеткие модели прогнозирования загрязненности поверхностных вод

**Лобова Т. В., Ткачев А. Н.***Новочеркасск, Южно-российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М. И. Платова  
qwest64@yandex.ru*

Качество поверхностных вод оценивается по величине удельного комбинированного индекса загрязненности вод (УКИЗВ), значения которого находятся по замерам характерных показателей, выполняемым гидрохимической сетью Росгидромета в пунктах наблюдения на водных объектах. В соответствии с РД/52.24.643-2002 «Метод комплексной оценки степени загрязненности поверхностности вод по гидрохимическим показателям» согласно найденным значениям УКИЗВ качество вод относят к одному из пяти классов  $E_k$ ,  $k = \overline{1, 5}$ :  $E_1$  = условно чистая,  $E_2$  = слабо загрязненная,  $E_3$  = загрязненная,  $E_4$  = грязная,  $E_5$  = экстремально грязная. С учетом нечеткого характера такой классификации рассматривается задача нечеткого прогноза качества поверхностных вод, которая сводится к нахождению класса загрязненности в пределах заданного временного лага. Решение находится в следующем порядке.

Задается универсальное множество в виде отрезка возможных значений УКИЗВ и соответствующая ему лингвистическая переменная, значениями которой являются термы  $E_k$ ,  $k = \overline{1, 5}$ . Для каждого частного (локального) показателя загрязненности, участвующего в формировании значения УКИЗВ, строится авторегрессионная модель, настройка параметров которой осуществляется по многолетним наблюдаемым значениям. Находятся значения УКИЗВ с использованием наблюдаемых и прогнозируемых значений всех частных (локальных) показателей загрязненности. Далее считается, что прогнозируемое значение УКИЗВ относится к классу  $E_i$ , если наблюдаемое значение УКИЗВ принадлежит промежутку, задающему этот класс. Полученные в результате данные используются для фазификации — нахождения функций принадлежности  $\mu_k(x)$ , соответствующих лингвистическим переменным  $E_k$ , которая выполняется статистическим методом.

При прогнозировании принимается следующая гипотеза качественного характера. Считается, что по результатам прогнозирования величины УКИЗВ загрязненность воды может быть отнесена к одному из классов  $E_k$  с вероятностью  $p_k$ ,  $k = \overline{1, 5}$ . УКИЗВ в пределах класса  $E_k$  рассматривается, как случайная величина, имеющая плотность распределения  $f_k(x) = \alpha_k \mu_k(x)$ ,  $k = \overline{1, 5}$ , где  $\alpha_k$  находятся из условия нормировки. Значение УКИЗВ формируется в результате выбора класса  $E_k$  с вероятностью  $p_k$  и нахождения его реализации согласно плотности распределения  $f_k(x)$ .

Прогнозирование класса загрязненности согласно предложенной модели выполняется с использованием байесовского классификатора, параметры  $p_k$  которого определяются в результате минимизации отклонения наблюдаемых значений класса от прогнозируемых. Приводятся примеры реализации модели с использованием реальных данных о загрязненности поверхности вод.

Результаты работы получены при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на проведение НИОКР, шифр заявки № 2819

## Визуализация области неустойчивости Тьюринга для системы Шнакенберга

**Лысенко С. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
sergey23ls@mail.ru

Уравнения реакции-диффузии играют важную роль в моделировании химических, биологических и др. процессов, характеризующихся образованием пространственно-временных структур при изменении параметров системы. Особенно интересен случай, когда диффузия играет дестабилизирующую роль, то есть имеет место неустойчивость Тьюринга. Для неустойчивости стационарного состояния по Тьюрингу необходимы устойчивость по отношению к пространственно-однородным возмущениям (в отсутствие диффузии) и неустойчивость по отношению к некоторым пространственно-неоднородным возмущениям (при наличии диффузии).

В настоящей работе рассматривается система Шнакенберга, которая является одной из фундаментальных систем реакции-диффузии с кубической нелинейностью:

$$\begin{aligned}u_t &= \gamma f(u, v) + u_{xx} = \gamma(a - u + u^2v) + u_{xx} \\v_t &= \gamma g(u, v) + dv_{xx} = \gamma(b - u^2v) + dv_{xx}\end{aligned}$$

В этой системе неизвестные  $u = u(x, t)$  и  $v = v(x, t)$  представляют собой концентрации двух биохимических веществ в точке  $x$  в момент времени  $t > 0$ , которые являются активатором и субстратом. Параметр  $d$  — положительный коэффициент диффузии,  $\gamma$  — положительная постоянная, характеризующая относительную силу влияния слагаемых реакции,  $a$  и  $b$  — положительные параметры реакции.

Известно, что область неустойчивости Тьюринга системы Шнакенберга задаётся четырьмя условиями, которые должны выполняться одновременно. Два из них соответствуют условиям устойчивости в бездиффузионном приближении, а остальные соответствуют неустойчивости равновесия в случае наличия диффузии. При этом необходимые условия не являются достаточными, а достаточные условия зависят от рассматриваемой области.

Результатом настоящей работы является создание компьютерной программы, предназначенной для визуализации области неустойчивости Тьюринга, для проведения виртуальных экспериментов с различными значениями параметров  $a$ ,  $b$ ,  $d$ , удовлетворяющих необходимым условиям неустойчивости и нахождения достаточных условий неустойчивости.

Интерфейс программы позволяет изменять значения параметров с малым шагом и при этом анализировать количество неустойчивых мод, попадающих в определённый интервал. Вывод значений неустойчивых мод осуществляется в виде таблицы. При помощи программы для различных значений  $a$  и  $b$  находится критическое значение параметра  $d$ , при котором в системе появляется первая неустойчивая мода. Проведено сравнение результатов компьютерных экспериментов с аналитическими результатами. На примере показано, что возможно возникновение от одной до пяти неустойчивых мод.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю С. В. Ревиной за постановку задачи и внимание к работе.

## Восстановление переменного модуля пороупругой балки генетическим алгоритмом

**Ляпин А. А., Святко Ю. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
lyapin@sfedu.ru

Рассмотрена задача о восстановлении неоднородного модуля упругости пороупругой балки в режиме установившихся колебаний при помощи генетического алгоритма. В качестве генетического алгоритма взят метод дифференциальной эволюции, позволяющий эффективно решать задачи минимизации функционала, зависящего от нескольких переменных.

Основным достоинством применения таких методик является возможность применения их для очень широкого класса задач. Основным требованием является наличие подпрограммы решения прямой задачи с возможностью формулировки на основе полученных данных о нахождении функционала, который необходимо минимизировать по набору определенных параметров.

Проанализирована эффективность применения алгоритма в зависимости от вида неизвестной функции, частотного диапазона и зашумления входной информации. Рассмотрены два различных подхода к решению задачи: восстановление точек распределения неизвестной функции и восстановление коэффициентов разложения неизвестной функции по некоторому набору базисных функций. В случае восстановления коэффициентов разложения функции по базису применен подход последовательного нахождения и корректировки коэффициентов, который показал свою эффективность при решении задачи. Регуляризация осуществлена при помощи метода Тихонова с учетом дополнительных слагаемых в функционале, характеризующих поведение производной измеряемой характеристики.

Генетический алгоритм, используемый при решении задачи, близок к градиентным алгоритмам, но не требует вычисления производных функций. В качестве сравнения поставленная задача была решена градиентным методом нелинейной оптимизации функционала. Сравнение полученных результатов показало эффективность обоих алгоритмов и выявило сильные и слабые стороны таковых. Получен важный результат, демонстрирующий отсутствие единственности приближенного решения обратной задачи.

Применение генетических алгоритмов при реализации обратной задачи требует большого числа решений прямой задачи, что приводит к значительным временным затратам в случае, когда однократное решение прямой задачи занимает даже небольшое время. С учетом этого, при реализации алгоритма особое внимание уделялось наибольшей оптимизации программы и возможному распараллеливанию решения прямой задачи или её этапов. Современные технологии и методы разработки позволяют использовать высокопроизводительные вычисления при решении задач математического моделирования, что позволит повысить эффективность работы генетического алгоритма.

## Собственные колебания гофрированных оболочек

**Макаров С. С., Устинов Ю. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

makarov-sergey-rostov@mail.ru

Работа посвящена исследованию собственных колебаний гофрированных оболочек вращения. Для этих целей на основе гипотез Киргофа—Лява были получены уравнения движения для оболочек вращения со сложной формой меридиана.

Рассмотрены две динамические задачи:

- 1) задача о собственных крутильных колебаниях;
- 2) задача о собственных продольно-изгибных колебаниях.

Исследования проведены для различных типов гофрировки срединной поверхности

$$r(z) = R \pm H \sin^2 \left( \frac{\pi z m}{L} \right)$$

$$r(z) = R \pm H \sin \left( \frac{\pi z m}{L} \right)$$

где  $R$  — радиус срединной поверхности на торцах оболочки,  $L$  — длина,  $H$  — амплитуда гофра,  $m$  — количество гофров(периодов). Проведён анализ влияния указанных геометрических параметров оболочки на спектр собственных частот.

Для задачи «1» построены асимптотические формулы, описывающие поведение первых пяти собственных частот от амплитуды недеформированной поверхности и определены области их применения.

Для задачи «2» рассмотрены два типа граничных условий: жесткая заделка и шарнирное опирание торцов оболочки, проведён сравнительный анализ результатов.

Исследования спектра собственных частот проводились для двух случаев:

- при фиксированной длине оболочки ( $L$ );
- при  $L_0/H = const$ , где  $L_0 = L/m$  — длина периода.

Геометрическая структура срединной поверхности оболочки (периодичность меридиана) позволила применить два метода — метод пристрелки и метод Флоке—Ляпунова, а также провести сравнительный анализ их эффективности с точки зрения временных затрат и их точности в зависимости от параметров конкретных задач.

Работа выполнена в рамках проектной части госзадания № 9.665.2014.К в сфере научной деятельности.

## Проблемы моделирования поверхностного роста биологических тканей

Манжиров А. В.<sup>1</sup>, Стадник Н. Э.<sup>2</sup><sup>1</sup>Москва, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН<sup>2</sup>Московский государственный университет информационных технологий,  
радиотехники и электроники

manzh@inbox.ru

Обсуждаются проблемы математического моделирования процессов роста биологических тканей. Основное внимание уделяется поверхностному росту. Формулируются фундаментальные положения математической теории поверхностного роста в случае больших и малых деформаций. В частности, обсуждается особенности кинематического поведения деформируемых тел, для которых основным тензором, определяющим кинематику процесса, является не тензор деформации или тензор скоростей деформации, а тензор деформации скоростей. Показано, что совершенно естественным образом основная система уравнений содержит только скорости перемещений и напряжений. При необходимости перемещения и напряжения восстанавливаются по простым формулам содержащим начальные значения. Особое внимание уделяется формулировке граничных условий на поверхности роста. Одно из этих условий получается из решения вспомогательной задачи о контакте двумерной поверхности с растущим трехмерным телом. Вторым условием является скорость движения поверхности роста. Эти условия позволяют определить две зависимости между тремя величинами: нагрузкой, натягом и скоростью движения поверхности роста. Одна из указанных величин может быть заданной, тогда две другие величины могут быть найдены из решения задачи. В ряде случаев указанное обстоятельство позволяет осуществлять управление одной из величин при помощи двух других.

Основной вопрос при моделировании роста живых тканей состоит в адекватности математической модели и возможности идентификации этой модели из эксперимента. Поэтому целью доклада является, в частности, обсуждение с широким кругом специалистов возможностей использования предложенной модели, а также возможностей постановки экспериментов для ее идентификации. Особый интерес как механиков и математиков, так и медиков вызывают проблемы экспериментальной идентификации *in vivo* и *in vitro*. В этой связи ставится ряд проблем, связанных с эффективным обеспечением модели необходимыми параметрами.

Рассмотрены некоторые модельные задачи для случая, когда ткань моделируется упругой средой. Обсуждаются проблемы адекватного описания свойств твердых и мягких биологических тканей с использованием вязкоупругих и стареющих, анизотропных и пористых сред.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 14-01-00741 и № 15-08-06330), Программы №12 ОЭММПУ РАН и гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-2611.2014.1.

Экспериментально-численное исследование задачи  
динамического изгиба композитной балки

Марков И. П., Петров А. Н., Игумнов Л. А., Брагов А. М.  
НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского  
igumnov@mech.unn.ru

Представлен экспериментально-теоретический подход, основу которого составили методики динамического натурального эксперимента и гранично-элементного численного моделирования в прямой формулировке.

Рассмотрим задачу о численном моделировании динамического испытания на изгиб композитной балки  $6 \text{ мм} \times 15 \text{ мм} \times 80 \text{ мм}$ . В центре лицевой поверхности на полосе шириной  $1.4 \text{ мм}$  заданы нормальные поверхностные усилия  $\tilde{t}_1(t) = t_0 f(t)$ ,  $t_0 = 1,075 \cdot 10^8 \text{ Па}$ . На противоположной стороне имеются две опоры шириной  $1.5 \text{ мм}$  каждая, расположенные симметрично относительно начала координат. Расстояние между опорами составляет  $45 \text{ мм}$ . На опорах задана скользящая заделка  $u_1 = 0$ . Остальная поверхность балки свободна от поверхностных усилий. Используется ортотропный материал.

Гранично-элементные решения сравнивались с результатами эксперимента и соответствующими результатами, полученными в программных комплексах конечно-элементного моделирования «Динамика-3» и ANSYS. Расчеты проводились на двух гранично-элементных сетках: 1048 и 1900 элементов. Значение параметра шагового метода численного обращения интегрального преобразования Лапласа выбрано  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-7} \text{ с}$ . Исследовались перемещения  $u_1(t)$  в точке максимального достижения значений.

Натурный эксперимент проводился следующим образом. Нагружение балки образца осуществлялось в системе «нагружающий стержень — опорная трубка». Мерные трубка и стержень изготовлены из алюминиевого сплава Д16. Физические и геометрические характеристики экспериментальной установки: внешний диаметр опорной трубки —  $48 \text{ мм}$ ; толщина стенки —  $1,5 \text{ мм}$ ; внутренний диаметр трубки —  $45 \text{ мм}$ ; диаметр нагружающего стержня —  $20 \text{ мм}$ ; площадь сечения нагружающего стержня —  $314,1593 \text{ мм}^2$ ; площадь сечения опорной трубки —  $219,1261 \text{ мм}^2$ ; модуль Юнга  $74000 \text{ МПа}$ ; стержневая скорость звука —  $5150 \text{ м/с}$ . Перемещения точек опоры образца и действующие на образец силы определялись на основе формул Кольского.

Продемонстрирована хорошая согласованность ГЭ-решений и результатов эксперимента.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 15-08-02814-а; 14-08-31410 мол-а; 13-08-00862-а; 14-08-31415 мол-а).

## Калибровочная модель локомоций: теория и эксперимент

Марценюк М. А., Сыпачев С. С.

*Пермский государственный национальный исследовательский университет*  
mamrcn@yandex.ru

Биологические объекты осуществляют движения в пространстве (локомоции) за счет изменения формы своего тела. Во многих опубликованных работах приведены детальные исследования кинематики локомоций. Однако сама связь между деформациями тела и мерой смещения объекта в пространстве в большинстве работ не рассматривается. В нашей работе исследована модель поступательного движения самодеформирующихся тел, в рамках которой изменение формы тела связывается с его смещением в пространстве (локомоторная связь). Поскольку величину трения при контакте с «землёй» сложно проконтролировать на опыте и описать в рамках простой теоретической модели, мы предположили, что тело может обмениваться с окружением веществом, временно присоединяя к определенной своей точке некоторую массу (модель присоединенной массы). При этом предполагается, что масса присоединяется «адиабатически», т. е. имеет скорость практически равную нулю и само тело покоится в лабораторной системе отсчёта (ЛСО).

Для экспериментальной проверки теории была создана действующая модель системы, которая совершает поступательное движение за счет изменения своей формы и присоединения масс. Система представляет собой две платформы, взвешенные на воздушной подушке, что позволило значительно снизить влияние сил трения, локомоторный цикл управления задается программируемым микроконтроллером.

В результате натурных экспериментов была продемонстрирована возможность поступательного самодвижения системы связанных тел при отсутствии трения, осуществляемого за счёт изменения формы и присоединения массы. Наиболее последовательная интерпретация результатов эксперимента достигается в рамках понятий калибровочной модели, к числу которых относятся: понятие о калибровочных потенциалах, траектория в пространстве форм и расслоение пространства, связность и голономия.

Положение частей объекта относительно лабораторной системы отсчета фиксировалось с помощью скоростной фотокамеры по меткам, размещенным на поверхности тела. Точность измерения координат была равна 0,5 мм. Компьютерная обработка фотографий, с использованием библиотеки OpenCV, позволила идентифицировать происходящие изменения формы тела и его смещения в ЛСО.

Сопоставление теоретической модели и эксперимента показало хорошую степень соответствия между ними. Дополнительный учёт инерционных эффектов позволит достичь более высокой точности совпадения теории и эксперимента. Развиваемый поход к теории локомоций даёт возможность перейти от простого описания наблюдаемых перемещений движущегося объекта к глубокому анализу механизмов их вызывающих.

## Дисперсия продольных волн в трансверсально-изотропных цилиндрах из экспоненциально-неоднородных материалов

Моисеенко И. А.

*Донецкий национальный университет*

mian@i.ua

Наряду с накопленными к настоящему времени результатами аналитических и численных исследований волновых процессов с применением моделей как однородного по физико-механическим свойствам, так и кусочно-однородного в радиальном направлении многослойного трансверсально-изотропного материала для протяженных цилиндрических волноводов, с позиций углубления фундаментальных исследований, направленных на учет характера изменений свойств материалов конструкций при применении различных технологий обработки, актуальными являются проблемы анализа спектров и свойств нормальных упругих волн вдоль непрерывно-неоднородных по радиальной координате анизотропных цилиндров, в том числе трансверсально-изотропных цилиндров с экспоненциальной радиальной неоднородностью физико-механических свойств.

В работе с применением приема перехода к обобщенной безразмерной кольцевой координате в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов с определяемыми из рекуррентных соотношений коэффициентами представлено решение задачи о распространении осесимметричных нормальных продольных волн в протяженных экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах концентрического кольцевого сечения. Полагается, что трансверсально-изотропный материал цилиндра является экспоненциально-неоднородным в радиальном направлении по всем своим физико-механическим свойствам, а его плотность  $\rho$  и модули упругости  $c_{ij}$  описываются соответственно представлениями  $\rho = \rho^{(0)} \exp(\lambda r)$ ,  $c_{ij} = c_{ij}^{(0)} \exp(\lambda r)$  в которых  $\lambda$  — действительнoзначный приведенный параметр неоднородности. Построенное решение использовано для получения дисперсионных соотношений, определяющих спектр указанных волн для цилиндров со свободными или жестко закрепленными граничными поверхностями.

При численном эксперименте в качестве базовых радиально однородных ( $\lambda = 0$ ) были выбраны конкретные трансверсально-изотропные материалы, волноводные свойства которых характеризуются различными альтернативными величинами приведенного параметра волновой анизотропии  $\Delta$ . Были проанализирована зависимость топологии распределений действительных ветвей спектров, фазовых и групповых скоростей бегущих нормальных волн от параметра неоднородности  $\lambda$  и параметра волновой анизотропии  $\Delta$ . На основе расчета нормированных форм волновых перемещений проиллюстрированы эффекты влияния показателя экспоненциальной неоднородности на кинематические характеристики исследуемых нормальных волн из различных мод спектра. Области использования результатов представленного исследования являются прочностные расчеты деталей машин, технологии ультразвуковой диагностики, акустоэлектроника.

## Исследование дисперсионных соотношений для неоднородного трансверсально-изотропного цилиндра

**Моргунова А. В.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
x\_tina89@mail.ru

Рассмотрены волны в упругом трансверсально-изотропном волноводе кольцевого поперечного сечения с упругими характеристиками, зависящими от радиальной координаты.

Важным аспектом задачи является изучение дисперсионного множества системы, которое позволяет анализировать структуру волнового поля на поверхности и внутри цилиндра в зависимости от геометрических параметров волновода и характеристик трансверсально-изотропного материала. Если для однородного цилиндра решение легко строится и дисперсионное уравнение выражается через функции Бесселя, то для неоднородного трансверсально-изотропного материала возможно лишь численное исследование задачи; некоторые закономерности строения дисперсионных множеств и характеристики упругих волн исследованы аналитически.

Задача рассмотрена в цилиндрической системе координат. Представлено построение дисперсионного множества для трансверсально-изотропного полого цилиндра со свободными цилиндрическими границами путем сведения исходной задачи к отысканию нетривиального решения краевой задачи для канонической системы дифференциальных уравнений первого порядка относительно амплитудных значений радиальных и осевых смещений, радиального и касательного напряжений. Сочетание спектральных параметров, при которых находится такое решение, представляет собой дисперсионное множество задачи. Показано, что это множество состоит из кривой, выходящей из начала координат и двух семейств гладких кривых, которые порождены двумя спектральными задачами для стоячих волн. Проанализированы два семейства дисперсионных кривых, которые отличаются кинематикой распространения. В общей ситуации эти кривые строятся численно с использованием метода пристрелки.

Получены аналитические зависимости, характеризующие линейный участок первой стержневой моды. Найден тангенс угла наклона линейного участка, который вычисляется по точной формуле (длинноволновое приближение), проведено сравнение с численными расчетами. Проведен анализ стоячих мод, выявлены случаи неоднородности, когда имеется точное решение задачи для частот запираения. Проведены вычислительные эксперименты для различных видов законов неоднородностей и различных частотных диапазонов. Проанализированы свойства дисперсионных кривых, выявлены участки с аномальной дисперсией, исследована их зависимость от геометрических и физических характеристик материала цилиндра. Проведено сравнение с изотропным случаем.

Автор выражает благодарность за внимание к работе научному руководителю проф., д. ф.-м.н. Ватульяну А.О.

## Расчет оптимального нагружения по заданному полю перемещений в средах со сложной реологией

Мурашкин Е. В.<sup>1</sup>, Аноп М. Ф.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Москва, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН

<sup>2</sup>Владивосток, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН  
evmurashkin@gmail.com

Необходимость повышения точности математического описания процессов происходящих при технологической обработке и эксплуатации металлоизделий вынуждает учитывать упругие свойства материалов на всех стадиях жизненного цикла изделия. Рассмотрение задач в классических моделях малых деформаций невозможно, когда относительное изменение формы рассматриваемого тела велико. Одной из таких характерных задач, где нельзя обойтись без применения модели больших деформаций, является задача о моделировании процессов в окрестности микропоры в металле, происходящих под действием интенсивного давления. Актуальность данной задачи обусловлена обнаруженным на опыте эффектом существенного повышения эксплуатационных характеристик металла при интенсивном всестороннем сжатии образцов «залечивания» микродефектов сплошности. Попытки смоделировать процесс залечивания микропоры в металле делались неоднократно, в том числе и на основе модели больших упругопластических деформаций, обладающей эффектом приспособляемости к периодическим нагружениям по циклу «нагрузка—разгрузка».

В настоящей работе предлагается в рамках полученного ранее решение задача о сферически симметричном сжатии шара с микропорой в центре рассчитать оптимальное нагружающее усилие, уменьшающее размеры микропоры до наперед заданного уровня. Условие несжимаемости среды в рассматриваемом случае определяет кинематику среды с точностью до неизвестной функции времени, что позволяет по известному закону деформирования определить процесс нагружения, вызывающий заданное деформированное состояние.

В работе рассмотрены возможности применения разработанного авторами эвристического алгоритма, который по сути является упрощенной реализацией метода роя пчел. По сравнению с алгоритмом ненаправленного случайного поиска предложенный метод показал высокую эффективность и надежность. Разработка собственной модификации метода роя пчел обусловлена большим количеством настраиваемых параметров, отсутствием универсального набора их значений и рекомендаций по эффективному перебору различных комбинаций настроек. Предложенный метод глобальной оптимизации является более универсальным и в меньшей степени завязанным от качества и количества настройки параметров присутствующих исходному алгоритму.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-31-21111 мол\_а\_вед).

## Магистерская программа мехмата ЮФУ «IT in Biomechanics»

**Надолин К. А., Карякин М. И., Наседкин А. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

nadolin@math.sfedu.ru

В декабре 2014 г. в Институте математики, механики и компьютерных наук ЮФУ завершился проект ICARUS — “Internationalised Curricula Advancement at Russian Universities in the Southern Region” («Интернационализация учебных планов на уровне магистра в российских вузах южного региона»). Проект выполнялся в рамках подпрограммы Tempus-IV 7 Рамочной Программы Евросоюза Южным федеральным университетом совместно с тремя российскими и четырьмя европейскими университетами. В состав консорциума входили Южно-российский государственный политехнический университет (г. Новочеркасск), Кубанский государственный университет (г. Краснодар), Воронежский государственный университет (г. Воронеж), а также University of Linköping (Швеция), University of Twente (Голландия), Lappeenranta University of Technology (Финляндия), Technical University Braunschweig (Германия). Продолжительность проекта ICARUS составила немногим более 3-х лет.

В результате выполнения проекта ICARUS в российских вузах были разработаны в соответствии с положениями Болонской декларации магистерские программы в области информационных технологий и инжиниринга: IT in Electrical Engineering (ЮРГПУ), IT in Systems Engineering (ВГУ), IT in Software Engineering (КубГУ) и IT in Biomechanics (ЮФУ).

Программа «IT in Biomechanics» является межкафедральной, а основными выпускающими кафедрами являются кафедра математического моделирования, кафедра теории упругости и кафедра вычислительной математики и математической физики. Планируется, что выпускники магистерской программы «IT in Biomechanics» будут востребованы для работы в научно-исследовательских организациях, на предприятиях с наукоемким производством и для преподавания математических и компьютерных дисциплин в вузах России и зарубежья. Выпускники магистратуры «IT in Biomechanics» могут поступать в аспирантуру Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ по специальностям 01.06.01 — математика и механика и 09.06.01 — информатика и вычислительная техника, а также в аспирантуру российских и зарубежных вузов по аналогичным специальностям.

В докладе будут отражены результаты совместной работы по проекту ICARUS. Основное внимание предполагается уделить вопросам международного сотрудничества университетов по созданию совместных образовательных программ. Также в докладе будут затронуты вопросы академической мобильности студентов и преподавателей, а также различные аспекты использования современных образовательных информационных технологий, включая Интернет.

Применение эволюционного метода для решения задачи  
многокритериальной оптимизации опорной рамы конструкции  
компрессорно-конденсаторного агрегата

**Напрасников В. В., Красновская С. В.**

*Минск, Белорусский национальный технический университет*

*N\_V\_V@tut.by*

Многокритериальная оптимизация позволяет расчетным путем найти наиболее эффективное сочетание параметров изделия прежде, чем начинать изготовление опытных экземпляров. Существуют разные подходы к решению задач многокритериальной оптимизации и принятия решений.

Эволюционные методы (ЭМ) являются эвристическими методами решения задач оптимизации структурного синтеза. Большинство эволюционных методов и алгоритмов для решения многокритериальных задач используют подход на основе обработки множества Парето.

Оптимизационная задача состоит в нахождении рациональных параметров опорной рамы конструкции компрессорно-конденсаторного агрегата. Рама обеспечивает возможность крепления агрегата на машину и удобный доступ для технического обслуживания. Габариты рамы агрегата жестко ограничены. Конструкция рамы агрегата сваривается сваркой по ГОСТ 5264-80. В качестве конструктивных элементов рамы были выбраны уголки стальные горячекатаные, швеллеры стальные горячекатаные.

Для облегчения создания конечно-элементной модели на основе созданной геометрической модели определялись элементы конструкции, не влияющие существенно на распределение частот собственных колебаний компрессорно-конденсаторного агрегата.

Для решения оптимизационной задачи использовался многокритериальный генетический алгоритм MOGA, встроенный в модуль DesignXplorer расчетной среды ANSYS Workbench.

В качестве оптимизируемых параметров были взяты геометрические размеры упоров рамы, толщины ее лонжеронов и поперечин. Функциональным ограничением выступал предел текучести материала рамы. Для проведения многокритериальной оптимизации задавалось два критерия оптимальности: масса конструкции и коэффициент запаса прочности конструкции. Требовалось минимизировать массу конструкции при максимальной рабочей нагрузке и максимизировать коэффициент запаса прочности конструкции.

Из конечного Паретовского множества решений выбирался один вектор решения с учетом приоритета критерия массы. Данный вариант позволяет уменьшить массу на 3,6%, а коэффициент запаса прочности увеличить на 4,8% по сравнению с исходным вариантом.

Платформа ANSYS Workbench позволяет использовать сторонние модули оптимизации. Имеет смысл в дальнейшем разработать и подключить пользовательский метод оптимизации, подходящий для нахождения рациональных параметров модели данного типа конструкции.

## Моделирование пористых активных материалов с учетом поверхностных эффектов

**Наседкин А. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

nasedkin@math.rsu.ru

В настоящее время для моделирования экспериментально наблюдаемого на наноуровне эффекта увеличения жесткости при уменьшении размеров тел достаточно широко используются методы континуальной механики сплошной среды с введением поверхностных напряжений. Этот подход применяется и для определения эффективных характеристик пористых упругих наноразмерных тел. Естественно, что тогда поверхностные напряжения можно ввести не только на внешних границах, но и на поверхностях пор внутри представительного объема тела. В результате при решении задач гомогенизации при сравнении неоднородных и однородных сред на наноуровне надо учитывать не только внешние, но и внутренние границы представительных объемов пористых материалов. При этом, на размеры границ влияет не только общая пористость, но также конфигурация, размеры и количество пор. Поэтому, для пористых нанокомпозитов с учетом поверхностных напряжений обнаруживается ряд интересных эффектов. Как обычно, для наноразмерных тел за счет поверхностных напряжений эффективные жесткости будут возрастать в сравнении с телами обычных размеров. В то же время, эффективные жесткости пористого нанокомпозитного тела при одной и той же пористости могут как увеличиваться, так и уменьшаться в зависимости от размеров и количества пор.

В данной работе при исследовании на наноуровне пористых пьезоэлектрических материалов предлагается подход, основанный на теории эффективных модулей механики композитов, моделировании представительных объемов и методе конечных элементов. Здесь, как и для пористых упругих нанокомпозитов, при моделировании представительных объемов для учета поверхностных напряжений границы контакта материала и пор покрывались поверхностными упругими мембранами. Кроме того, эти же границы дополнительно покрывались диэлектрическими пленками. Получающиеся статические задачи сравнения для неоднородных пьезоэлектрических материалов решались с использованием специального программного инструментария, разработанного на макроязыке APDL конечно-элементного пакета ANSYS. При этом учет поверхностных эффектов проводился посредством включения в расчетную схему помимо пьезоэлектрических объемных конечных элементов поверхностных пластинчатых упругих элементов с опциями только мембранных напряжений и диэлектрических пластинчатых конечных элементов. Проведенные расчеты тестовых задач продемонстрировали отмеченное выше влияние поверхностных эффектов на значения эффективных модулей пористых пьезоэлектрических нанокомпозитов.

Следует отметить, что аналогичные подходы могут быть применены и для моделирования пористых магнитоэлектрических тел наноразмеров, причем с учетом как механических, так и магнитоэлектрических поверхностных эффектов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00943) и госзадания Минобрнауки (проект 213.01/ОПНИ 009).

Моделирование смесевых пороупругих композитов  
методами эффективных модулей и конечных элементов  
с учетом внутренней структуры

**Наседкина А. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
nasedkina@math.sfedu.ru

В работе рассматривается комплексный подход к определению материальных модулей пороупругих объемных (смесевых) композитов произвольного класса анизотропии с учетом их внутренней микроструктуры. Согласно классическому методу эффективных модулей механики композитов выбирается набор стационарных краевых задач для представительного объема, позволяющий определить эффективные свойства эквивалентного анизотропного материала. Представительный объем моделируется с учетом внутренней структуры, а полученные краевые задачи пороупругости для неоднородных сред решаются численно по методу конечных элементов. Из полученных решений вычисляются осредненные характеристики напряженно-деформированного состояния и фильтрационных полей, по которым и определяются эффективные модули композита.

В качестве представительных объемов выбирались кубические решетки, составные части которых являются конечными пороупругими гексаэдральными элементами со своими материальными модулями и со своими элементными системами координат, определяющими кристаллографические оси анизотропии отдельных конечных элементов. Рассмотрены различные модели представительных объемов с изменяемыми значениями долей вхождения фаз. Эти модели генерируются случайным образом, но в рамках некоторых законов детерминированности. Так, был использован простейший способ случайного генерирования вхождения одной из фаз и следующие подходы, разработанные другими авторами: метод, поддерживающий связность каркаса одной из фаз вплоть до 90 % вхождения второй объемной доли фазы и метод ограниченной диффузией агрегации, генерирующий один кластер фрактального типа из элементов второй фазы. Среди наборов граничных условий рассматривалось два базовых варианта: граничные условия первого рода (для перемещений и порового давления) и условия второго рода (для напряжений и скорости фильтрации).

При численной реализации по специальным программам, реализующим описанные выше методы, генерировались структуры представительных объемов. Полученные массивы данных о свойствах элементов кубических решеток бинарных композитов далее передавались в программы на языке APDL для конечно-элементного пакета ANSYS. В этом пакете проводились решения набора задач пороупругости при специальных наборах граничных условий и вычислялись эффективные модули анизотропных пороупругих композитов.

В качестве примера рассмотрены модели пороупругих сред, представляющие интерес для некоторых задач био- и геомеханики. Результаты вычислительных экспериментов показали, что структуры представительных объемов могут достаточно существенно влиять на значения эффективных модулей пороупругих композитов, особенно для больших долей включения одной из фаз.

## Использование онлайн-обучения по курсу Scientific Computing в магистерской программе IT in Biomechanics

**Наседкина А. А.<sup>1</sup>, Бочев М. А.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

<sup>2</sup>*Энсхеде, Университет Твенте*

nasedkina@math.sfedu.ru

В магистерской программе “IT in Biomechanics”, которая реализуется в Институте математики, механики и компьютерных наук ЮФУ в рамках международного образовательного проекта ICARUS, есть курс “Numerical methods of linear algebra for sparse matrices”. Курс читается на английском языке во втором семестре первого года магистратуры, включает лекционные и практические занятия. Лекционная часть курса посвящена изучению структуры и методов хранения разреженных матриц, прямых и итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой размерности с разреженными матрицами, проекционных методов решения СЛАУ с подробным изучением методов подпространства Крылова, основанных на ортогонализации Арнольди и на биортогонализации Ланцоша, методам нахождения предобусловливателей и параллельных реализаций итерационных методов решения СЛАУ. Практическая часть курса включает лабораторные работы, которые предполагают реализацию алгоритмов изученных методов в пакете MatLab или на языке C. Проектное задание состоит в применении различных методов решения СЛАУ и в сравнении результатов решения на примере СЛАУ, полученной в результате дискретизации заданной системы уравнений в частных производных.

В магистерской программе университета Твенте (г. Энсхеде, Нидерланды), являющимся европейским университетом-партнером по проекту ICARUS, имеется курс “Scientific Computing”. Содержание первой части этого курса во многом схоже с содержанием курса “Numerical methods of linear algebra for sparse matrices”. В первой части курса “Scientific Computing”, дается обзор методов приведения матриц к каноническому виду, метод подпространства Крылова для решения систем линейных алгебраических уравнений и методов решения задач на собственные значения. Вторая часть курса посвящена различным классам вычислительных задач, представляющим интерес для современных инженерных наук.

Для преподавания курса “Scientific Computing” в университете Твенте используются современные образовательные технологии, такие как онлайн-обучение. В связи с этим, появилась идея использования видео-лекций по курсу “Scientific Computing” в дополнение к лекциям по курсу “Numerical methods of linear algebra for sparse matrices”, читаемым в ЮФУ. Такой подход к обучению позволит магистрантам ЮФУ глубже освоить современные численные методы линейной алгебры для разреженных матриц, познакомиться с различными трактовками предмета и с передовыми методиками в образовании, лишней раз убедиться в интернациональности науки и образования, а также оценить качество преподавания в различных вузах.

Информационная модель оценки степени риска развития  
сопутствующих заболеваний у пациентов с дегенеративными  
заболеваниями позвоночника

Негреева М. Б.<sup>1</sup>, Колокольцев М. М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Иркутский научный центр хирургии и травматологии*

<sup>2</sup>*Иркутский национальный исследовательский технический университет*

negreeva@yandex.ru

У больных с дегенеративными заболеваниями позвоночника важным элементом моделирования является многофакторный анализ обширного потока имеющийся информации. При этом пользователи заинтересованы в поиске не только обозначенных ими данных по той или иной патологии, но и прогнозных ситуаций и неизвестных закономерностей, которые могут возникнуть в процессе наблюдения за больным (<http://center-yf.ru/data/stat/Informacionnaya-model.php>).

Предложена прогнозная модель оценки риска развития сопутствующих заболеваний у пациентов с дегенеративным стенозом позвоночного канала в форме собранной базы данных и компьютерной программы, позволяющих интерпретировать вышеизложенные ситуации. Компьютерная модель относится к типу «Прогноз динамики изменения системы». Объектом является пациент, а в качестве характеристик объекта использованы его пол, возраст, место жительства, давность основного заболевания, уровень локализации стеноза, сопутствующие соматические заболевания, наличие инвалидности, а также антропометрические показатели: рост и масса тела, окружности талии (ОТ) и бёдер. Модель позволит провести расчеты индексов массы тела (ИМТ), талия/бёдра (ИТБ), систематизировать тип ожирения по ОТ, установить корреляционные связи между показателями и другую статистическую обработку данных. Оценка по индексам проводится в соответствии с классификациями ожирения по ИМТ и риска сопутствующих заболеваний (ВОЗ, 1997 г.), вероятности возникновения сердечно-сосудистых заболеваний (ССЗ) по ИТБ (ВОЗ, 1999 г.). По ИМТ оценивается не только масса тела, но и риск развития сопутствующих заболеваний, а на основании ИТБ и ОТ выявляется вероятность развития ССЗ. Так, из 57 обследуемых риск развития сопутствующей патологии у 7 пациентов (в 12,3% случаев) оценён обычным, у 17 (29,8%) — повышенным, у 19 пациентов (33,3%) — высоким, у 13 (22,8%) — очень высоким и у 1 больной (1,8%) — чрезвычайно высоким.

Компьютерная модель позволит распределить больных по степени риска развития сопутствующих заболеваний (обычный, повышенный, высокий, очень и чрезвычайно высокий). Оценка степени риска развития сопутствующих заболеваний необходима для определения тактики лечения и в целом — разработке медико-профилактической программы реабилитации пациента.

## Обратные задачи для функционально-градиентных термоупругих предварительно напряженных тел

**Нестеров С. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

1079@list.ru

В настоящее время исследования в области механики связанных полей привлекают все большее внимание ученых. Известно, что термоупругие функционально-градиентные материалы являются неоднородными по своему строению. Кроме неоднородности при расчете физических полей необходимо учитывать и наличие предварительных напряжений, которые возникают в результате различных технологических операций. В этой связи для идентификации термомеханических характеристик и преднапряжений функционально-градиентных материалов необходимо решать коэффициентные обратные задачи (КОЗ) для неоднородных предварительно напряженных термоупругих тел. Обратные задачи термоупругости исследованы весьма слабо, что объясняется нелинейностью этих задач. В работе предложен подход по восстановлению одномерных законов изменения термомеханических характеристик и предварительных напряжений неоднородных тел — стержня и длинного полого цилиндра.

Получены уравнения термоупругости для неоднородных предварительно напряженных тел. Сформулированы постановки обратных задач о нахождении предварительных напряжений и термомеханических характеристик неоднородных тел — стержня и цилиндра. После обезразмеривания и применения преобразования Лапласа, получены решения прямых задач: задача для стержня решена на основе аппарата интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода; задача для цилиндра решена методом пристрелки. Для решения поставленных обратных задач на основе обобщенного соотношения взаимности для предварительно напряженных термоупругих тел были получены операторные соотношения, позволяющие организовать итерационный процесс.

Сначала проведены вычислительные эксперименты по идентификации предварительных напряжений при известных термомеханических характеристиках тел. Определены наиболее информативные промежутки времени для измерения смещений и температуры на внешней поверхности тел и оценена погрешность реконструкции в зависимости от типа нагружения и монотонности функций, характеризующих неоднородность. Выяснено, что преднапряжения восстанавливаются с хорошей точностью: погрешность реконструкции монотонных функций не превосходит 5%, а немонотонных 10%. Затем проведено исследование по влиянию величины предварительных напряжений на результаты реконструкции термомеханических характеристик. Выяснено, что при увеличении начальных напряжений погрешность реконструкция модулей упругости термоупругих тел быстро возрастает и при некоторых значениях начальных напряжений становится уже невозможной. В тоже время увеличение начальных напряжений практически не изменяет относительную погрешность реконструкции теплофизических коэффициентов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00196-а) и Министерства образования и науки (проект № 9.665.2014/К).

## Методы оптимизации расчета волновых, электрических и тепловых полей в гибридных композиционных материалах

**Никитин Ю. Г.<sup>1</sup>, Лапина О. Н.<sup>1</sup>, Васильченко А. А.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Краснодар, Кубанский государственный университет*

<sup>2</sup>*Краснодарский технологический университет*

yug\_nikitin@mail.ru

Рассматриваются связанные пространственные термоэлектроупругие гармонические колебания многослойных гибридных композиционных материалов, представляющих собой многослойные пакеты термоэлектроупругих слоев с плоскопараллельными границами раздела. Упругая, тепловая и пьезо- и пироэлектрическая анизотропия слоев в пакете может быть произвольной. В областях на поверхности пакета слоев и/или на интерфейсных границах слоев задаются механические, тепловые и электрические нагрузки. В работе используются два подхода. Первый основан на использовании интегральных представлений решений в виде двукратных контурных интегралов Фурье от произведения символов матриц-функций Грина и вектора нагрузок. Второй подход основан на решении соответствующих краевых задач методом конечного элемента в средах ABAQUS и COMSOL. В подходе, основанном на интегральных представлениях, для оптимизации вычислений краевых задач термоэлектроупругости применимы те же методы, что и разработанные ранее методы для чисто упругих и термоупругих задач. Разработанные для упругих и термоупругих композитов методы ускорения вычислений контурных интегралов и подинтегральных функций (метод интегрирования с помощью теории вычетов, метод прямого вычисления контурных интегралов, интерполяционные сетки и схемы для аппроксимации матриц-функций в ближней зоне, асимптотические представления матриц-функций в дальней зоне) были значительно модифицированы для термоэлектроупругого случая. Однако основной акцент в работе делался на сравнении двух указанных выше подходов по трудоемкости, точности и скорости вычислений. Основной проблемой при использовании метода конечных элементов (не только в средах ABAQUS или COMSOL) является отсутствие адекватных стандартных средств для моделирования бесконечных областей. Метод моделирования поглощающих границ (G. R. Liu, S. S. Quek Jerry. A non-reflecting boundary for analyzing wave propagation using the finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 39, 403–417, 2003), использованный в данной работе и в значительной степени решающий данную проблему, предложен только для упругих материалов, для термоупругих и электроупругих материалов потребовалось разработка нового варианта данного метода. Сравнение двух подходов по точности показало очень хорошее качественное и количественное совпадение результатов. Для плоских задач два подхода дают приблизительно одинаковую расчетную скорость, для пространственных задач МКЭ быстрее интегральных методов, однако, подбор параметров поглощающих границ в каждом конкретном случае требует «ручной настройки», и, в результате, суммарное расчетное время оказывается сопоставимым.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края 13-01-96511-р-юг-а.

## Об устойчивости нелинейно-упругого полого цилиндра при раздувании и растяжении

**Обрезков Л. П.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
leonidobrezkov@bk.ru

Рассматриваются задачи деформации и устойчивости полого цилиндра при однородном растяжении и раздувании. Численный анализ поставленных задач выполняется в программной среде Maple 11 для одноконстантной модели Блейтца и Ко, двухконстантной модели Кирхгофа—Сен-Венана и пятиконстантной модели Мурнагана полуобратным методом. Анализ устойчивости описанного выше тела проводился методом линеаризации, состоящем в наложении малой деформации на конечную. С использованием линеаризованных уравнений нейтрального равновесия найдено положение равновесия тела, мало отличающееся от первоначального положения. Точка потери устойчивости отождествлялась с точкой существования нетривиального решения линейной однородной краевой задачи, состоящей из четырех уравнений в случае осесимметричного однородного одноосного растяжения или шести уравнений в случае неосесимметричной деформации цилиндра при одновременном растяжении и раздувании.

В результате исследования получены значения деформаций и усилий, при которых происходит потеря устойчивости описанного выше тела. В постановке об одноосном однородном растяжении полого цилиндра рассмотрена задача только осесимметричной потери устойчивости и получено, что наименьшее значение критической нагрузки для тела достигается на первой моде. На примере пятиконстантной модели материала Мурнагана показана существенность дополнительных условий теоремы Спектора. В частности, нетипичное расположение точек бифуркационного равновесия для набора мурнагановских параметров, соответствующих материалу оргстекло, что связано с нарушением одного из условий этой теоремы, а именно условия Бэйкера—Эриксона. В задаче о раздувании и растяжении полого цилиндра для модели материала Блейтца и Ко на плоскости параметров «коэффициент удлинения цилиндра—отношение внутренних радиусов в отчетной и текущей конфигурациях», построены бифуркационные кривые и получена область устойчивости.

Работа выполнена при поддержке проекта Министерства образования и науки Российской Федерации № 9.665.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания.

## Разработка новых модулей комплекса ACELAN для решения задач с пористыми электроупругими и магнитоупругими материалами

Оганесян П. А.<sup>1</sup>, Надолин Д. К.<sup>2</sup>, Курбатова Н. В.<sup>2</sup>, Цыганков В. В.<sup>2</sup>,  
Огурцов А. Ю.<sup>2</sup>, Криворотова Д. В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*

<sup>2</sup>*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

wolwerine@yandex.ru

Целью данной работы является разработка новой версии комплекса ACELAN для моделирования пористых упругих, электроупругих и магнитоупругих материалов. Представленная версия комплекса состоит из графического интерфейса, реляционной базы данных материалов, инструментов сборки локальных и глобальных матриц метода конечных элементов, генератора сеток, редактора сценариев на основе языка Python и инструментов постпроцессорной обработки. Также комплекс обладает обновленным форматом хранения данных о геометрии, граничных условиях, материалах и полученных решениях. Модульная структура пакета подразумевает реализацию некоторых его частей в виде динамически подключаемых библиотек, что позволяет независимо обновлять отдельные части программы и использовать данные библиотеки в других программных проектах.

Одной из основных задач, которые могут быть решены при помощи данной версии пакета, является задача со смесевыми композитами. В работе рассматриваются особенности построения конечно-элементных сеток с учетом связности структур внутри представительного объема в случаях «материал—пора» и «материал—материал». Также рассмотрены сложности, возникающие при реализации метода конечных элементов при решении задач с различными материалами, которым соответствуют модели с разным числом степеней свободы в узлах разбиения. Представлены различные подходы к построению локальных матриц для различных типов конечных элементов. Реализована возможность производить поворот локальных систем координат внутри отдельных тел модели с учетом изменения материальных свойств анизотропных материалов. Проведено нагрузочное тестирование отдельных частей пакета, направленное на определение предельных размерностей решаемых задач. Наиболее ресурсоемкие алгоритмы реализованы с использованием многопоточности.

В работе над пакетом использовались современные техники эффективной разработки: unit-тестирование, использование сборочного сервера, распределенной системы контроля версий. Проведен сравнительный анализ предложенной программной реализации с наиболее популярными КЭ-пакетами. Ведется разработка клиент-серверных решений на основе расчетных модулей комплекса, направленных как на высокопроизводительные вычисления, так и на визуализацию данных с использованием web-приложений.

## Прохождение сдвиговой волны по ортотропному волноводу из состыкованных под углом полуслоев

**Пачева М. Н.**

*Донецкий национальный университет*

marinapacheva@mail.ru

Исследование процессов распространения волн в составных волноводах из состыкованных разнонаправленных элементов типа полосы (слоя) представляет интерес как с точки зрения описания общих закономерностей волновых движений в неоднородных волноводных структурах, так и для чрезвычайно широкого круга приложений в акустоэлектронике, геоакустике, ультраакустической дефектоскопии. В наиболее полном объеме численно-аналитические исследования по этой проблеме проведены для волноводов электромагнитных и акустических волн.

В представляемой работе получено и исследовано теоретическое численно-аналитическое решение задачи о распространении сдвиговых волн в составном волноводе из двух состыкованных под углом ортотропных полуслоев со свободными плоскими гранями, один из которых имеет наклоненную по отношению к плоским граням торцевую граничную поверхность, а торцевая поверхность второго ортогональна плоским граням. Используемый подход базируется на методе представления волновых полей рядами по базисным множествам бегущих и краевых стоячих нормальных волн, а также на концепции метода частичных областей. Согласно последней для полуслоя со скошенной торцевой поверхностью выделяются подобласти — геометрические элементы сечения в виде полуслоя с ортогональной граням торцевой поверхностью и треугольной подобласти, дополняющей сечение до полуслоя с наклонной границей. Искомые комплексные амплитудные функции для волновых перемещений в падающих, отраженных и преломленных волнах подлежат определению из краевой задачи для уравнений стационарных сдвиговых упругих колебаний антиплоской деформации материалов полуслоев. Волновые поля в указанных искусственно выделяемых частичных подобластях и стыкующемся полуслое, имеющем ортогональную граням торцевую поверхность, представляются рядами с неопределенными коэффициентами по базисным частным решениям соответствующих волновых уравнений в прямоугольных и полярных координатах, удовлетворяющим, в частности, краевым условиям на свободных плоских гранях.

Алгебраизация функциональных краевых условий механического сопряжения выделенных в сечении частичных с ортогональным граням торцом подобластей и стыкующегося полуслоя осуществляется методом наименьших квадратов и сводит исходную задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

С использованием построенного решения осуществлены расчеты полей волновых перемещений для отдельных значений относительной длины падающей нормальной волны из низшей моды соответствующего дисперсионного спектра, варьируемых углов наклона границы стыковки фрагментов и варьируемых значений физико-механических характеристик стыкуемых полуслоев.

## Вычислительная модель популяционной вспышки с переопределяемой скоростью роста

**Переварюха А. Ю.<sup>1</sup>, Дубровская В. А.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН*

<sup>2</sup>*Санкт-Петербургский госуниверситет аэрокосмического приборостроения*  
temp\_elf@mail.ru

В докладе обсуждается метод моделирования резкого увеличения прироста численности на основе особых свойств трансформаций фазового портрета динамической системы. Моделируемый процесс разбивается на последовательность существенно отличающихся фаз. Для переходов между фазами процесса использован метод контролируемой реализации качественных метаморфозов поведения динамической системы. Предложена дискретно-непрерывная вычислительная модель, описывающая эффект самопроизвольного перехода от аperiodических флуктуаций к фазе взрывообразно ускоряющегося репродуктивного процесса с последующей фазой быстрого спонтанного затухания.

Реализованы основные идеи: дифференцированное описание силы действия факторов в разных состояниях популяции и наличие для модели неустойчивого равновесия в популяционном процессе, преодоление которого начинает фазу стремительного увеличения. Подходящими для явления вспышки представляется методов моделирования колебаний эффективности репродуктивного цикла и изменений факторов смертности на последовательных стадиях развития.

Оригинальным решением представляется организация непрерывно-событийной вычислительной структуры, где изменения происходят при достижении особых условий внутренних переменных системы. Реализовать предикативное дополнение системы ОДУ удалось с применением методов теории гибридных систем. Если представить сложную скачкообразную эволюцию процесса в виде графа с переходами, то гибридная система может рассматривать переходы не между состояниями, а между поведением. Воспользуемся представлением времени:  $\tau = \bigcup_n \{Gap\_pre_n, [T_{n-1}, T_n], Gap\_post_n\}$  Простая модель численности поколения  $N(t)$  зависящая от веса  $w(t)$  задает кривую убыли с двумя параметрами:

$$\frac{dN}{dt} = -(\alpha N(t)/w(\tau) + \beta) N(t) \quad (1)$$

Реализовано описание изменений скорости роста при смене этапов, влияющих на выживаемость. Скорость роста особей определяет момент выхода поколения из-под действия превалирующих на данном этапе онтогенеза факторов смертности, связанных с хищничеством. Объединено уравнение убыли  $N(t)$  и структура с дважды предикативно переопределяемой правой частью, с использованием модификации уравнения фон Бергаланфи для третьей стадии скорости роста:

$$\frac{dw}{dt} = \begin{cases} q, & 0 < t < \tau \\ \frac{g}{\sqrt{N} + \zeta}, & t > \tau, w(t) < w_{k1} \\ \eta w(t) - V\sqrt{w(t)}, & w_{k1} < w(t) < w_k \end{cases} \quad (2)$$

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ №15-07-01230.

## Типы ветвления автоколебаний в вертикальном слое бинарной смеси

**Петрова Е. И., Моршнева И. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

harigamypeople@gmail.com

Рассматриваются две вертикальные бесконечные изотермические пластины, между которыми находится бинарная смесь, состоящая из двух нереагирующих компонент. В задаче имеется два диссипативных механизма — теплопроводность и диффузия. Явления сильно осложняются перекрестными кинетическими эффектами — термодиффузией и диффузионной теплопроводностью (последней в данной работе будем пренебрегать). Возникающие в слое смеси движения описываются уравнениями конвекции в приближении Обербека—Буссинеска. Уравнения движения имеют стационарное плоскопараллельное решение с кубическим профилем скорости, линейным распределением температуры, концентрации и постоянным давлением.

Исследуется задача о ветвлении плоских периодических по времени режимов конвекции при колебательной потере устойчивости основного стационарного режима. Предполагается, что возмущения периодичны по вертикальной переменной. Уравнения возмущений обладают круговой симметрией  $O(2)$ , что позволяет применить теорию бифуркации рождения циклов в системах с данной симметрией, развитую в работах В. И. Юдовича и И. В. Моршневой. Из результатов этих работ следует, что при переходе параметра через критическое значение от основного решения может ответвляться три вида автоколебаний, представляющих собой нелинейную смесь пары бегущих волн и две бегущие навстречу друг другу волны. Характер ветвления и устойчивость этих режимов зависит от соотношений между коэффициентами системы уравнений разветвления. Эти коэффициенты представляют собой функционалы, которые выражаются через собственные функции линейной и сопряженной задач устойчивости, решения ряда неоднородных краевых задач с правыми частями, явно зависящими от этих же собственных функций. Вычисления коэффициентов системы уравнений разветвления для достаточно широкого диапазона параметров задачи показали, что возможны пять различных типов ветвления. Из проведенных расчетов следует, что и бегущие волны, и их нелинейная смесь могут быть устойчивы в зависимости от значений параметров. Для значений чисел Прандтля  $Pr = 12, 14, 15.6$  при значении числа Шмидта  $Pr_d = 4$  и параметра термодиффузии  $\varepsilon = 1.214$  нелинейная смесь простых волн устойчива при циклической частоте ниже среднего значения, а устойчивость бегущих волн наблюдается при циклической частоте около среднего значения и выше. Для значений параметра термодиффузии  $\varepsilon = 0.5, 0.6, 0.8, 1$  при значении числа Прандтля  $Pr = 6.7$  и числа Шмидта  $Pr_d = 30$  нелинейные волны неустойчивы, бегущие волны устойчивы при малой и большой циклической частоте, при этом около среднего значения наблюдается неустойчивость. А для значений параметра термодиффузии  $\varepsilon = 0.3, 0.5, 1.214$  при значении числа Прандтля  $Pr = 15.6$  и числа Шмидта  $Pr_d = 2$  нелинейные волны также неустойчивы, а устойчивость бегущих волн можно обнаружить при циклической частоте выше среднего значения.

## Биомеханика артериальных сосудов мышечно-эластического типа

**Полиенко А. В., Недорезов П. Ф., Голядкина А. А., Кириллова И. В.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*

st\_aav@mail.ru

Артерии мышечно-эластического типа по строению и функциональным особенностям занимают промежуточное положение между эластическими и мышечными артериями. К ним относятся, например, сонные, подключичная, бедренные, брыжеечные артерии и др. В среднем слое данных сосудов наряду с гладкомышечными клетками присутствует значительное количество эластических волокон, в глубокой части наружной оболочки расположены пучки гладкомышечных клеток, снаружи их покрывает соединительная ткань, состоящая из коллагеновых и эластических волокон. Такое строение стенки позволяет им сочетать высокую эластичность и способность сокращаться, значительно ограничивая свой просвет при колебаниях артериального давления. При этом артерии данного типа более подвержены различным патологиям, в частности атеросклерозу, и во многом из-за своего строения. В данной работе представлены результаты изучения механических свойств артерий мышечно-эластического типа: сонные (СА), бедренные (БА) и плечевая (ПЛА). Выбор СА и БА обусловлен частотой встречаемости патологий, а ПЛА — отсутствием таковых в 98% случаев. Данные выводы сделаны на основе анализа медицинской литературы, а также документов Саратовского городского бюро судебно-медицинской экспертизы.

Исследования проводились на испытательных машинах Instron 5944 и 3342, позволяющих ставить эксперимент на одноосное растяжение и сжатие, с учетом окружающей анатомической среды изучаемого объекта в организме человека. Материалом для экспериментов послужили нефиксированные образцы тканей вышеуказанных артерий, изъятые у трупов людей обоего пола в возрасте от 27 до 80 лет, поступивших в Саратовское городское бюро судебно-медицинской экспертизы (разрешение на забор образцов давалось этической комиссией). Препарирование проводилось на кафедре судебной медицины Саратовского государственного медицинского университета. Все материалы были распределены по 4 возрастным группам (I — 61–70 лет, II — 51–60, III — 41–50, IV — 31–40) с учетом полового признака. Отметим, что из каждого трупа были извлечены три выше указанные артерии, что позволило проводить оценку наличия патологии, или ее отсутствия, и, как следствие, изменения механических свойств в рамках одного организма. В результате эксперимента выявлено, что наиболее часто атеросклероз БА встречался в I и II возрастных группах, при этом преимущественно у лиц мужского пола. Патологии СА наблюдаются во всех возрастных группах, но во II явные осложнения обнаружены только для лиц мужского пола, а в I — для обоих полов. Был подтвержден факт отсутствия патологий в ПЛА. Результаты проведенного исследования позволили получить полную объективную картину механических свойств тканей артерий и систематизировать полученные данные по возрасту, полу и нозологическим формам заболеваний.

Работа выполнена в рамках Государственного задания № 2014/203, код проекта 1617.

## Идентификация неоднородных характеристик пьезоэлектрического цилиндра

**Половодова А. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
polovodova@yandex.ru

В работе рассмотрены прямая и обратная задачи для пьезокерамического цилиндра при неоднородной поляризации. Для цилиндра, радиус которого много меньше его длины (стержень), поляризация моделируется зависимостью пьезомодуля от продольной координаты; для среза цилиндра (диск) — зависимостью пьезомодуля от радиальной координаты. При этом считается, что модуль упругости и диэлектрическая постоянная неизменны. Верхняя и нижняя грани цилиндра электродированы, свободны от механических напряжений, возбуждение происходит путем подведения разности потенциалов к электродам.

В прямой задаче для стержня сформулировано операторное уравнение Фредгольма второго рода. Решение ищется численно с помощью метода коллокации. Построены графики амплитудно-частотных характеристик: относительного смещения на торцах и функции тока. Рассмотрены две постановки обратной задачи реконструкции функции, характеризующей степень неоднородности поляризации. В первой постановке поле смещений задано внутри стержня. Чтобы решить эту задачу, достаточно исследовать квадратичную функцию, коэффициенты которой находятся численным дифференцированием заданного поля. Во второй постановке решение ищется по дополнительной информации об амплитудно-частотной функции тока. Решение нелинейной задачи получено путем использования метода построения итерационного процесса, основанного на процедуре линеаризации. Сформулировано операторное уравнение Фредгольма первого рода для каждого шага итерационного процесса. Численное решение находится с помощью метода регуляризации А. Н. Тихонова.

В прямой задаче для диска сформулировано обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами относительно функции радиального смещения, которое далее сводится к канонической системе двух дифференциальных уравнений относительно радиального напряжения и радиального смещения. При построении численного решения возникает особенность в нуле, поэтому далее рассматривается диск с вырезанным малым цилиндрическим отверстием в центре. Решение ищется методом пристрелки. В обратной задаче сформулированы три задачи для поочередного нахождения характеристик пьезоэлектрического диска. Решение ищется на основе данных о радиальной функции смещения на трех различных частотах.

Представлены результаты вычислительных экспериментов для различных типов неоднородностей.

## Анализ энергетических потерь пульсовой волны на стентированных участках артериальных сосудов

**Портнов Е. Н., Устинов Ю. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
djonatan-91@mail.ru

Для описания пульсового движения крови в периферийных артериальных сосудах мышечного типа предлагается новая математическая модель типа Громека. Стенка сосуда рассматривается как упругий полый цилиндр с винтовой анизотропией, порождаемой структурой распределения мышечных волокон, кровь — как несжимаемая жидкость.

В рамках рассматриваемой модели движение системы кровь стенка сосуда описывается двумя уравнениями

$$\rho \partial_t v + \partial_z p = 0, \quad \partial_z^2 p - c_0^{-2} \partial_t^2 p = 0; \quad (1)$$

где  $v$  — скорость крови,  $p$  — гидродинамическое давление,  $\rho$  — плотность крови,  $\partial_t, \partial_z$  — частные производные по времени и осевой координате соответственно,

$$c^2 = G/\rho; \quad (2)$$

Здесь  $G$  — радиальная жесткость стенки сосуда,  $c$  — фазовая скорость волны давления.

Определение  $G$  осуществлялось численным решением задачи Ляме для упругого полого цилиндра с винтовой анизотропией в широком диапазоне изменения параметров цилиндра.

Стентированный участок сосуда рассматривался как упругий полый цилиндр с радиальной жесткостью  $G_1 > G$ , величина которой задавалась из эвристических соображений.

Для анализа энергетических потерь пульсовой волны на стентированном участке, была рассмотрена задача о распространении пучка волн, порождаемого систолой, в продольно неоднородном сосуде.

Проведена серия расчетов для выяснения влияния различных параметров стентированного участка на энергетические потери пульсовой волны путем вычисления энергетического коэффициент прохождения (отражения). Из этих расчетов, в частности, следует, что если длина стента кратна длине волны основной гармонике пучка волн, порождаемой систолой, то коэффициент прохождения равен единице и форма пульсовой волны практически не искажается. В случаях, когда длина стентированного участка не кратна длине волны основной гармонике, первоначальная форма систолы искажается, что иллюстрируется результатами расчетов.

Равновесие высокоэластичной тонкостенной трубки,  
одетой на негладкий абсолютно твёрдый цилиндр

**Портнова М. Ю.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
angelochek5553@rambler.ru

В данной работе рассматривается задача о взаимодействии длинной тонкостенной трубки, изготовленной из высокоэластичного материала, и абсолютно твёрдого цилиндра. Пусть трубка одним концом надета на цилиндр так, что охватывает только его один край на некоторую глубину. Цилиндр закреплён неподвижно. В работе исследуются два случая. В первом случае на систему трубка — цилиндр больше нет внешних воздействий. Во втором случае на свободный край трубки дополнительно действует растягивающая сила, направленная вдоль трубки и стягивающая трубку с цилиндра. В обоих случаях равновесие системы возможно только за счёт сил трения, возникающих между трубкой и твёрдым цилиндром.

При заданных геометрических размерах трубки и цилиндра, известном материале трубки, коэффициенте трения между боковой поверхностью цилиндра и одетой частью трубки варьируемым параметром является глубина одевания трубки на цилиндр. В данной работе исследуется зависимость между глубиной одевания, необходимой для равновесия, и стягивающей силой.

Отдельной задачей исследовано влияние геометрических размеров и коэффициента трения параметров на необходимую глубину одевания при отсутствии стягивающей силы.

В работе рассматриваются тонкостенные трубки из высокоэластичного материала, которые моделируются цилиндрической нелинейно-упругой безмоментной оболочкой. Для описания механических свойств материал используется несжимаемая модель Бартенева—Хазановича. Сила трения принимается как кулоновская, то есть пропорциональная нормальной реакции взаимодействия. Облегание трубки цилиндра происходит без отрывов.

Для несжимаемого материала Бартенева—Хазановича удалось получить аналитическое решение задачи в случае отсутствия стягивающей силы. В случае наличия стягивающего усилия решение в области контакта трубки с цилиндром имеет аналитическое представление. Для другой части оболочки решение строиться численно. Для этого краевая задача решается с помощью метода пристрелки по одному параметру.

В работе построены формы деформированной трубки для различных величин параметров задачи, проанализировано влияние коэффициента трения, геометрических параметров, стягивающей силы на необходимую для равновесия глубину одевания.

## О возможности использования пакета FlexPDE в учебных курсах по механике

**Пустовалова О. Г., Карякин М. И.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*o.g.pustovalova@gmail.com*

В современных курсах механики, теории упругости и математического моделирования используются различные конечно-элементные пакеты численного решения задач, такие как Ansys, Nastran, Abaqus и др. В перечисленных программах для задания свойств среды пользователь выбирает «элементы» — специальные блоки, в которых интегрированы определяющие соотношения, уравнения равновесия или движения и их конечно-элементная аппроксимация. Для работы в этих средах используется как графический интерфейс, так и скриптовые языки, но в обоих случаях решаемые дифференциальные уравнения задачи скрыты от пользователя. Несколько особняком стоит конечно-элементная программа FlexPDE, главная концепция которой — не расчет конструкций, а решение краевых задач. И хотя данная программа не предназначена для инженерного проектирования, возможности ее решателей для анализа дифференциальных уравнений, записанных в символьном виде, находят широкое применение в исследованиях по широкому спектру задач механики, физики, химии.

В настоящей работе будут представлены некоторые возможности FlexPDE для численного анализа уравнений теории упругости, которые могут оказаться весьма полезными при разработке и реализации курсов по сопротивлению материалов, механике сплошной среды, теории упругости и пластичности. Гибкость скриптового языка FlexPDE для описания системы дифференциальных уравнений и краевых условий, определяющих задачу, позволяет легко переходить к новым моделям материалов, и проводить численные эксперименты по тестированию материальных и функциональных параметров этих моделей. С точки зрения наглядности и эффективности процесса обучения важно, чтобы теоретические принципы подтверждались экспериментами. И FlexPDE может выступать удобной площадкой реализации вычислительных экспериментов. С ее помощью можно просто продемонстрировать эффективность перехода от трехмерной задачи к двумерной, решив эквивалентные задачи в 2-мерной и 3-мерной постановках, например для случаев плоского напряжённого и плоского деформированного состояния.

Особенности деформирования высокоэластичных тел можно продемонстрировать в задаче о чистом изгибе бруса. Темой студенческого исследования могут стать следующие задачи: расчет геометрических параметров схемы нагружения, при которых реализуется состояние чистого изгиба; учет и физической и геометрической нелинейностей. Последняя задача включает в себя несколько этапов — вывод уравнений в нелинейной постановке, автоматизация получения членов уравнения для новых нелинейных определяющих соотношений, задание граничных условий, влияние геометрических и материальных параметров, использование тонких методов расчета для получения лучшей сходимости решения.

Длинноволновая асимптотика задачи устойчивости  
периодических и почти периодических течений вязкой жидкости

**Ревина С. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

revina@math.rsu.ru

Настоящая работа представляет собой обзор результатов по построению асимптотики задачи некоторых классов стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости относительно длинноволновых возмущений. Рассматриваются двумерные параллельные течения и течения, близкие к параллельным, в двух случаях: периодичности по пространственным переменным и периодичности по одной из переменных и почти периодичности по другой. Сформулированы условия, при которых происходит монотонная или колебательная потеря устойчивости.

Рассматривается двумерное  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  движение вязкой несжимаемой жидкости под действием поля внешних сил  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ , описываемое системой уравнений Навье—Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

где  $\nu$  — безразмерная вязкость.

Сначала поле внешних сил предполагается периодическим по пространственным переменным  $x_1, x_2$  с периодами  $\ell_1$  и  $\ell_2$  соответственно. Аналогичные условия ставятся для поля скорости  $\mathbf{v}$ . Предполагается, что период  $\ell_1$  фиксирован, а период  $\ell_2$  неограниченно возрастает:  $\ell_2 = 2\pi/\alpha$ , волновое число  $\alpha \rightarrow 0$ . Средняя по пространственному прямоугольнику периодов скорость считается заданной

$$\langle\langle \mathbf{v} \rangle\rangle = \mathbf{q}.$$

Во втором случае поля внешних сил, скорости и давления периодичны по  $x_2$  с периодом  $\ell_2$  и условно-периодичны по переменной  $x_1$ . В этом случае в постановке задачи вместо среднего скорости по прямоугольнику периодов задается среднее в смысле почти периодических функций. Доказаны леммы, которые позволяют перенести результаты для периодического случая на почти периодический.

Строится длинноволновая асимптотика решения задачи устойчивости стационарного течения, когда основное поле скорости принадлежит классу течений, близких к параллельным

$$\mathbf{V} = (\alpha V_1(\mathbf{x}), V_2(\mathbf{x}))$$

и в частном случае параллельного течения, в двух случаях: когда среднее скорости основного течения вдоль длинного периода  $\langle V_2 \rangle$  отлично от нуля и когда оно равно нулю.

Показано, что возможна как монотонная, так и колебательная потеря устойчивости. Выписаны осредненные уравнения, из которых определяются критические значения вязкости и собственные значения линейной спектральной и линейной сопряженной задачи. Найдены главные члены асимптотики. Показано, что в случае, когда отклонение профиля скорости от его среднего значения является нечетной функцией, полученные формулы упрощаются.

## Метод механических квадратур в применении к решению смешанных задач механики

**Саакян А. В., Агаян К. Л.**

*Ереван, Институт механики НАН Армении*

avsahakyan@gmail.com

Теория сингулярных интегралов и сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши стала бурно развиваться в 40-е годы прошлого столетия, и уже с 50-х годов, исходя из практической надобности, начали интенсивно развиваться приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений. Основная направленность этих работ была либо на прямое численное интегрирование без учета особенности поведения решения у концов отрезка интегрирования, либо на регуляризацию сингулярного уравнения. Несмотря на то, что метод прямоугольников также относится к квадратурным формулам, под методом механических квадратур будем понимать метод прямого интегрирования, учитывающий особенность поведения решения и основанный на квадратурных формулах типа Гаусса. К вопросу построения эффективных квадратурных формул и их применению к решению интегральных уравнений математической физики обращалось очень большое число ученых, тем не менее исследования в этом направлении продолжают до сегодняшнего дня. Однако, подавляющее большинство этих работ относится к наиболее часто встречаемому частному случаю, именно уравнению первого рода, когда поведение плотности сингулярного интеграла у концов отрезка интегрирования описывается корневой функцией. Существенно меньше число работ, посвященных решению сингулярного интегрального уравнения второго рода с вещественным коэффициентом, либо уравнения с обобщенным ядром Коши, когда поведение искомой функции у концов отрезка интегрирования определяется степенной функцией с произвольными допустимыми вещественными показателями  $\alpha$  и  $\beta$ .

Настоящая работа посвящена распространению метода механических квадратур на случай, когда эти показатели комплексные числа, удовлетворяющие условию  $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > -1$ . Показана возможность использования квадратурных формул, полученных для вещественных показателей, и в этом случае. Применимость и эффективность метода механических квадратур показана на примере следующих задач:

1. Смешанная задача для упругой плоскости, составленной из двух разнородных полуплоскостей, соединенных между собой по лучу, на котором имеется тонкое жесткое включение. Внешней нагрузкой является нормальное давление, приложенное к берегам полубесконечной трещины.

2. Смешанная задача для упругой плоскости, составленной из двух разнородных полуплоскостей, на линии соединения которых имеются тонкое жесткое включение и трещина конечных длин, при наличии стационарного температурного поля. Внешней нагрузкой является нормальное давление, приложенное к берегам трещины.

3. Контактная задача для упругой полуплоскости, содержащей жесткое тонкое включение конечной длины, контактирующее с полуплоскостью только по одной грани подверженное действию вытягивающей осевой силы.

## Экспериментальное исследование неизотермического термоупругопластического контакта

Садырин Е. В.<sup>1</sup>, Митрин Б. И.<sup>1</sup>, Кренев Л. И.<sup>1</sup>, Абетковская С. О.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет

<sup>2</sup>Минск, Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси

lkrenev@yandex.ru

Производители современной техники все чаще сталкиваются с проблемой эксплуатации деталей машин в условиях повышенной температуры. Одним из наиболее распространенных методов для определения физико-механических характеристик материалов является наноиндентирование.

Благодаря развитию инструментальной базы наноиндентирования, становится возможным его использование при определении зависимости механических характеристик (модуля Юнга, твердости) современных материалов от температуры. Однако, процессы, происходящие при высокотемпературном наноиндентировании, отличаются от таковых при стандартных условиях, что обуславливает необходимость их изучения для правильной интерпретации результатов. Целью настоящего исследования является наноиндентирование углеродистых сталей на примере образца стали 45 на приборе Nanotest 600, установленном в РЦКП НОЦ «Материалы» ДГТУ (<http://nano.donstu.ru/>). Были установлены зависимости расчетных модуля упругости и твердости от температуры и скорости внедрения. Нагрев проводился в 2 режимах:

- одновременный нагрев индентора и образца до одинаковых температур с последующим индентированием;
- одновременный нагрев индентора и образца до различных температур (индентор холоднее образца) с образованием теплового потока и последующим индентированием.

Температура в ходе эксперимента контролируется температурными датчиками. Каждый эксперимент представляет собой серию из 8 индентов и проводился для 5 различных скоростей внедрения. Сравнение расчетных и экспериментальных данных показывает, что реальный процесс индентирования с учетом неизотермичности достаточно сложен, но общее термоупругое поведение системы индентор—образец в начале разгрузки моделируется достаточно хорошо. При этом в дальнейшем уточнении нуждается распределение термоупругих параметров по глубине образца и геометрия зоны контакта. В эксперименте получены следующие данные по расчетному модулю Юнга, демонстрирующие влияние разности температур индентора и образца на результат процесса индентирования. При индентировании при комнатной температуре 28°С расчетный модуль Юнга равен  $212,64 \pm 3,76$  ГПа; при нагреве образца и индентора до 200°С модуль Юнга  $196,92 \pm 3,2$  ГПа; в том случае, когда образец нагрет до 200°С, а индентор до 85°С, расчетный модуль Юнга снижается до  $141,58 \pm 5,89$  ГПа.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 14-07-00343-а, 15-57-04084-Бел\_мол\_а, 15-07-05208-а).

## Исследование поведения липопротеина высокой плотности в различных физических полях методом молекулярной динамики

Сафонов Р. А., Коссович Е. Л., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю.,  
Донник А. М.

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*  
safonovra@gmail.com

Одной из наиболее часто встречающихся патологий элементов артериальной системы является атеросклеротическое поражение сосудов. Причиной его возникновения является проникновение жиробелковых комплексов (фосфолипидов, белков и холестерина) в субэндотелиальный слой интимы артерий. Однако, даже при наличии современного диагностического оборудования, механизмы начала образования липидных пятен и их проникновения в субэндотелиальный слой сосуда не известны. Согласно современным исследованиям, проникновение липидных комплексов в интиму артерий может быть спровоцировано механическим повреждением клеток эндотелиального слоя и увеличением межклеточного просвета. Однако даже при этом условии пространство между клетками значительно меньше размеров основных переносчиков жиробелковых комплексов в крови — липопротеинов низкой и очень низкой плотности. Диаметр указанных объектов в среднем составляют от 50 до 200 нм, в то время как расстояние между клетками эндотелия в норме не превышает 1–2 нм, а при его повреждении увеличивается до 10–15 нм. Следовательно, при исследовании процесса липидной инфильтрации требуется учитывать не только факторы, влияющие на целостность эндотелиального слоя, но и различные причины деформирования и разрушения липопротеинов, а также их прилипания к гликокаликсу.

Заметим, что для изучения процессов деформирования биологических макромолекул удобно использовать методы математического моделирования. Методы молекулярной механики и динамики позволяют в реальном времени изучать вышеуказанные процессы, одновременно визуализируя их. При этом известно, что симуляция в рамках метода молекулярной динамики имеет статус аналога натурального эксперимента!

В данной работе авторы построили и исследовали модель липопротеина высокой плотности, наиболее маленького из указанного класса макромолекул. Поведение модели было исследовано в различных внешних условиях. Было проведено моделирование поведения липопротеина высокой плотности в вакууме под механическими воздействиями растяжения, сжатия. Далее задача была усложнена на случай нахождения объекта в водной среде, в которой изменялись температура, а также давление. В ходе проведения экспериментов фиксировались данные об изменении структуры макромолекулы, в том числе такие, которые могли привести к ее разрушению. Эти данные в дальнейшем могут быть использованы для продолжения исследований о разрушении липопротеинов и проникновении жиробелковых комплексов в субэндотелиальный слой.

Работа выполнена при поддержке Государственного задания № 2014/203, код проекта 1617.

## Биомеханические особенности ротационной остеотомии проксимального участка бедренной кости

Саченков О. А.<sup>1</sup>, Андреев П. С.<sup>2</sup>, Хасанов Р. Ф.<sup>2</sup>, Коноплев Ю. Г.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Казанский федеральный университет

<sup>2</sup>Казань, Республиканская клиническая больница МЗ РТ

4works@bk.ru

Целью нашего исследования является определение направления и величины максимально возможного угла поворота при наличии очага деструкции эпифиза головки бедра с помощью компьютерного моделирования тазобедренного сустава на основе концепции трехплоскостной коррекции пространственной патологической ориентации проксимального отдела бедренной кости с учетом степени, локализации дегенеративно-дистрофического процесса и тяжести поражения у детей и подростков на примере болезни Легга—Кальве—Пертеса. Метод лечения болезни Легга—Кальве—Пертеса заключается в остеотомии вдоль нижнего контура шейки бедренной кости, тем самым разделяя кость на два объекта и поворотом проксимального участка до определенного угла, снимая таим образом нагрузку с пораженного участка. При ротации происходит перераспределение биомеханических нагрузок на основную группу мышц, меняется расположение крепления основных мышц, что приводит к изменению компрессии в суставе и изменению картины напряжения всего тазобедренного сустава в целом.

Были проведены исследования картины распределения усилий в мышцах при ротации, компрессии в суставе при различных тактиках остеотомии. При моделировании остеотомии считалось, что проксимальный участок соединен с бедренной костью одноподвижной вращательной парой. Моделирование проводилось для различных анатомических параметров: шеечно-диафизарный угол (ШДУ) 115–120°, угол антеторсии (АТ) 20–30°; поворот производился в обоих направлениях около оси вращения, при этом определялись удлинения мышц. Так при одномоментном смещении на 15° максимальные усилия в *m. obturator internus* достигли 467 Н, в *m. piriformis* — 233 Н; при мгновенном смещении на 30° — 778 Н, в *m. piriformis* — 389 Н.

Было выявлено, что при одномоментной (мгновенной) ротации проксимального отдела бедра превышающие 30°, возникают максимальные напряжения в элементах эпифиз головки бедра-вертлужная впадина с развитием нарушения структуры костной ткани. Анализ расчетов показал, что при повороте кпереди поведение мышц стабильней при изменении анатомических параметров, в то время как при повороте к спине ряд мышц в зависимости от угла антеторсии начинают сжиматься.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №13-01-97059, №13-01-97058, № 12-01-00955, № 12-01-97026, № 12-01-31212, № 14-01-31291.

## Оценка влияния степени дефицита покрытия вертлужного компонента на несущую способность эндопротеза

Саченков О. А.<sup>1</sup>, Мазуренко А. В.<sup>2</sup>, Коноплев Ю. Г.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Казанский федеральный университет

<sup>2</sup>Чебоксары, Федеральный центр травматологии, ортопедии  
и эндопротезирования

4works@bk.ru

Целью работы стало определение методами математического моделирования критической величины недопокрытия ацетабулярного компонента, при которой возможна его имплантация без использования дополнительной опоры. Актуальность данного исследования продиктована клинической практикой и отсутствием четких рекомендаций в тактике эндопротезирования с недопокрытием вертлужного компонента. В рамках исследования была построена трехмерная параметрическая модель, позволяющая моделировать поведение ацетабулярного компонента в вертлужной впадине при различных степенях дисплазии. В рамках проведения численного эксперимента учитывалась посадка в натяг чашки эндопротеза, степень дисплазии оценивалась на основе оригинального способа интраоперационного измерения площади недопокрытия вертлужного компонента. Были проведены расчеты для чашек диаметром 52, 54 и 56 мм. На основе результатов численных расчетов был изучен механизм потери несущей способности ацетабулярного компонента, получены зависимости величины критической силы от процента недопокрытия. Была выявлена стабильность имплантата при степени недопокрытия до 20%, до 30% величина критической силы превышает 2 кН и уменьшается с увеличением процента недопокрытия.

Экспериментальные испытания на стенде для недопокрытия 18% выявили явную стабильность вертлужного компонента (разрушаются испытываемые образцы); испытания для значения недопокрытия 25% — критическим диапазоном значения силы является 1100–1300 Н, если отнести эти значения к имеющимся диаграммам усилия при ходьбе, то в зоне риска оказываются пациенты весом 55–65 кг; испытания для недопокрытия 33% — критическим диапазоном значения силы является 600–950 Н, если отнести эти значения к имеющимся диаграммам усилия при ходьбе, то в зоне риска оказываются пациенты весом 30–55 кг; испытания для недопокрытия 33%, с подкреплением — критическим значением силы является 1050 Н, если отнести эти значения к имеющимся диаграммам усилия при ходьбе, то в зоне риска оказываются пациенты весом 52 кг.

Полученные результаты не являются абсолютно бесспорными, поскольку реальные условия во время хирургического вмешательства могут отличаться от заложенных в математическую модель, но проведенные исследования позволяют сформировать представление о влиянии величины дефицита покрытия и позволяет хирургу ориентироваться в вопросах выбора дополнительных методов стабилизации. Проведенные исследования позволяют судить о степени недопокрытия вертлужного компонента как одном из факторов, влияющих на механическую стабильность имплантата.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №13-01-97059, №13-01-97058, № 12-01-00955, № 12-01-97026, № 12-01-31212, № 14-01-31291.

## Параметрическое исследование структурной перестройки костной ткани

**Седов В. М., Сабанеев Н. А., Маслов Л. Б.**

*Ивановский государственный энергетический университет*  
paradox\_patriot@mail.ru

Известно, что живые ткани в процессе своего роста и развития существенным образом реагируют на внешнее силовое поле, в котором они функционируют. Костная ткань является одним из ярких представителей живых клеток, на которые положительно влияют внешние механические стимулы. Например, восстановление костной ткани после перелома запускает механизм репаративной регенерации клеток между костными отломками. Возмущения, вносимые внешней механической нагрузкой в установившееся движение жидкости в транспортной системе кости, могут обеспечивать управление скоростью и самим процессом структурной перестройки.

Для реализации алгоритма перестройки костной ткани была разработана упрощенная трехмерная конечно-элементная модель кости человека, на которой и был проведен ряд численных экспериментов. Задача состоит в том, чтобы подобрать наиболее оптимальные параметры внешнего воздействия на процесс сращивания кости в зоне перелома. В ходе эксперимента варьировались частота и амплитуда динамической составляющей механического воздействия. Частота внешнего силового поля выбиралась из диапазона возможностей возбуждения колебаний современных вибрационных установок. Амплитуда динамической составляющей силы выбиралась двумя способами: в первом случае амплитуда принималась постоянной для всех частот, во втором — изменялась из условия нормировки по энергии колебаний.

При помощи программы трехмерного моделирования физико-механических характеристик костной ткани в процессе регенерации FE3DRPEV (Маслов Л. Б., ИГЭУ ®) и программного комплекса ANSYS Mechanical APDL 15.0 были получены пространственные конечно-элементные картины изменения плотности костной ткани в зоне перелома с течением времени. Для разных частот в одни и те же моменты времени плотность костной ткани может вести себя по-разному. При повышении частоты колебаний скорость сращивания значительно возрастает (увеличение плотности и модуля Юнга). При этом существенное влияние на процесс регенерации оказывает амплитуда динамической составляющей силы. В случае переменной амплитуды, уменьшающейся при возрастании частоты, также как и при постоянной амплитуде имеет место восстановление кости в зоне перелома. Однако процессы регенерации во времени имеют различные характеристики, что требует проведения дальнейших вычислительных экспериментов.

## Деформирование и устойчивость нанообъектов

Семенов Б. Н.<sup>1</sup>, Кочнев А. С.<sup>1</sup>, Морозов Н. Ф.<sup>1</sup>, Овидько И. А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет

<sup>2</sup>Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН

semenov@bs1892.spb.edu

Методами континуальной механики исследовано деформирование и устойчивость пластин наноразмерной толщины с дефектами типа вырезов и включений при одноосном растяжении. Показано, что с уменьшением толщины слоя существенно возрастает влияние поверхностных напряжений на лицевых сторонах пластины. Проведена оценка вклада поверхностных в величину критических нагрузок, при которых теряется плоская форма деформирования при одноосном растяжении.

Методом молекулярной динамики исследованы механические характеристики (предел прочности при растяжении, степень предельного растяжения до разрушения) листов графена, содержащих одиночные дефекты и ансамбли дефектов типа 5-8-5 высокой плотности. Каждый такой дефект представляет собой бивакансию, создающую локальную конфигурацию «пятиугольник-восьмиугольник-пятиугольник» в гексагональной кристаллической решетке графена. Выявлено, что присутствие ансамблей 5-8-5 дефектов высокой плотности в графеновых листах при растяжении приводит к значимому снижению их прочности (на десятки процентов) по сравнению с прочностью бездефектного графена. Результаты компьютерного моделирования свидетельствуют о том, что предел прочности при растяжении и степень предельного растяжения до разрушения листов графена, содержащих ансамбли 5-8-5 дефектов высокой плотности, чувствительны к температуре. При увеличении температуры наблюдается почти линейное уменьшение предела прочности графенового листа, а также близкое к линейному уменьшение степени предельного растяжения до разрушения.

При наличии в образце единственного дефекта разрушение, вне зависимости от типа дефекта, всегда начинается от ячейки с нарушением формы. На первом этапе происходит объединение ячейки дефекта с соседними шестиугольными ячейками. В этот момент образуется одна или несколько более крупных ячеек, состоящих из 8–15 атомов. Дальнейшее разрастание таких дефектов приводит к образованию трещины, которая приводит к полному разрушению образца. Характерным является образование углеродных нитей, которые на начальном этапе служили границами между объединёнными дефектами. В процессе образования трещин эти границы не разрушаются и образуют нити толщиной всего в один атом углерода, объединяющие уже фактически разделённые полуплоскости исходного графенового листа.

Для образцов с комбинацией дефектов на начальном этапе разрушения образуется множество очагов разрушения, каждый дефект становится источником зарождения новой трещины. При достижении критического уровня напряжений происходит объединение нескольких дефектов в единую трещину, которая распространяется с колоссальной скоростью, приводя к стремительному разрушению образца.

Работа выполнена при поддержке гранта СПбГУ №6-37-671-2013.

## К общей теории необратимых процессов поляризации и деформирования

Скалиух А. С.

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
a.s.skaliukh@gmail.com

Наиболее востребованными в настоящее время для практических применений в качестве рабочих элементов в сенсорах и актуаторах являются поликристаллические сегнетоэлектрические материалы. Микроминиатюризация таких элементов неизбежно связана с неоднородным характером распределения механических и электрических полей внутри области рабочего элемента. При этом не исключена вероятность возникновения ситуации, когда они становятся достаточно большими, способными частично деполаризовать или изменить характер предварительной поляризации. В связи с этим построение математических моделей, описывающих необратимые процессы поляризации и деполаризации электрическими и механическими полями, являются актуальными и практически важными.

В работе представлена общая теория необратимых процессов поляризации электрическими и механическими полями в поликристаллических сегнетоэлектрических материалах для квазистатических процессов. На основе термодинамики необратимых процессов получены определяющие соотношения для обратимых частей вектора поляризации и тензора деформации, когда функция внутренней энергии выбирается в виде квадратичной формы этих переменных с коэффициентами, зависящими от остаточных частей вектора поляризации и тензора деформации. Для построения определяющих соотношений для необратимых составляющих вектора поляризации и тензора деформации была использована теория запертой стенки сегнетоэлектрического материала. Чтобы учесть одновременное влияние и электрического поля и механического напряжения, был использован энергетический критерий переключения доменов. В результате построены гистерезисные операторы для определения приращений вектора поляризации и тензора деформации в виде уравнений в дифференциалах. Учитывая необратимый характер поляризационных процессов, на основе инкрементальной теории получены все необходимые уравнения для применения метода конечных элементов в задачах с необратимыми процессами, протекающими в сегнетоэлектрических керамических материалах. Принципиальное отличие данной работы от предыдущих заключается в использовании энергетического критерия переключения доменов, который позволил учесть в полной мере одновременное влияние электрических и механических полей на процессы поляризации в трехмерном случае при совершенно произвольном приложении электрического поля и механических напряжений. Разработаны алгоритмы решения конечно-элементных задач, составлены вспомогательные программы, которые имплантированы в конечно-элементный комплекс ACELAN, который позволяет решать задачи для керамических материалов в том числе и с неоднородной поляризацией.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-08-01094-а).

## Моделирование дефекта неоднородной вязкоупругой биологической ткани

Смолюк Л. Т., Смолюк А. Т., Проценко Ю. Л.

*Екатеринбург, Институт иммунологии и физиологии УрО РАН*

justgazer@gmail.com

Известно, что использование математических моделей для анализа влияния пространственной и функциональной неоднородности в биологических тканях является практически единственным возможным решением ввиду сложности экспериментального исследования взаимодействия неоднородных сегментов в миокарде целого сердца. Нами было показано, что невозможно достоверное описание неоднородных вязкоупругих характеристик биологических тканей в рамках простых конфигураций, составленных из моделей Максвелла, Кельвина и т. п. Нами установлено, что описание вязкоупругих свойств миокарда с использованием принципа конструкционной жесткости подтверждается в биомеханических экспериментах и одновременно удовлетворяет данным по морфологической структуре ткани сердца. В этом подходе связи между отдельными блоками миокардиальной ткани на разных уровнях структурной организации также обладают конструкционной жесткостью и механические характеристики этих связей нелинейно зависят от деформации. В работе предложена структурно-функциональная модель квазидвумерного образца биологической ткани с введением дефекта по структурным и механическим характеристикам. Дефект имитирует патологические изменения в миокардиальной ткани, возникающие, например, при гипертрофии, сердечной недостаточности и т. п.

Модель представляет собой структуру из 7 блоков морфофункциональных единиц, соединенных упругими связями. Вводится неоднородность по центральному блоку. Дефектный блок имеет большую жесткость, чем остальные блоки модели. Установлено, что при одинаковой полной деформации всей модели в модели с дефектом поперечные упругие связи испытывают на 20–30% большие деформации, чем в модели без дефекта. Итак, при наличии точечного дефекта с большей жесткостью начинается перерастяжение соседних областей ткани, что в свою очередь может приводить к увеличению дефектной области в реальной биологической ткани. Таким образом, представленная модель является одним из первых этапов в изучении влияния различных локальных дефектов или повреждений ткани на результирующий механический отклик, что имеет важное значение при исследовании структурно-функциональных патологических изменений в биологических тканях.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 43 по стратегическим направлениям развития науки на 2015 г. «Фундаментальные проблемы математического моделирования», гранта РФФИ №13-04-00367-А.

Идентификация трещины в трубе  
с применением аппарата искусственных нейронных сетей  
в сочетании с методами ультразвукового контроля

**Соболь Б. В., Васильев П. В.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
lyftzeigen@mail.ru

Неразрушающий контроль является неотъемлемой частью технического диагностирования и используется для оценки технического состояния узлов промышленного оборудования без применения разрушающих операций. Среди методов неразрушающего контроля ведущее положение занимает ультразвуковой контроль. Он основан на способности звуковых волн отражаться от границы раздела двух упругих сред, обладающих разными акустическими свойствами.

Рассматриваются методы идентификации внутренних трещиноподобных дефектов с применением ультразвукового контроля в совокупности с аппаратом искусственных нейронных сетей. Идентификация дефекта основана на излучении в исследуемый объект и последующем принятии отраженных ультразвуковых волн и дальнейшем анализе полученных данных (амплитудно-частотных и временных характеристиках) с целью определения наличия дефектов, а также их размера, положения, глубины залегания.

Построена конечно-элементная модель сечения трубы, усиленной внутренней кольцевой накладкой с внутренним трещиноподобным дефектом с применением комплекса COMSOL Multiphysics. Разработана модель распространения ультразвуковой волны, при этом особое внимание уделялось значениям параметров размера конечного элемента для составного тела и времени шага. Проводится моделирование эхо- и теневого методов ультразвукового контроля. Эхо-метод подразумевает, что преобразователь генерирует колебания и он же принимает отражённые от дефектов эхо-сигналы (источник и приемник колебаний находятся на внешней поверхности трубы). Теневой метод подразумевает, что один из преобразователей генерирует колебания, а второй принимает их (источник колебаний находится на внешней, а приемник на внутренней поверхностях исследуемого объекта), при этом признаком наличия дефекта будет являться значительное изменение амплитуды принятого сигнала.

Построена искусственная нейронная сеть. Установлена оптимальная структура нейронной сети и форма обучающих векторов для некоторых методов ультразвукового контроля и их комбинаций. Проведено исследование влияния различных геометрических параметров исследуемых объектов на показатели обучения нейронных сетей.

Анализ полученных результатов показал, что средняя ошибка идентификации дефекта в случае с использованием эхо-метода составляет 22,74%, а с применением комбинации эхо- и теневого методов 0,72%.

Авторы выражают искреннюю благодарность доктору физ.-мат. наук, профессору А. Н. Соловьеву за проявленное внимание и интерес к данной работе.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-08-00142\_а.

О влиянии покрытия произвольной толщины на концентрацию напряжений в вершинах внутренней поперечной трещины

**Соболь Б. В., Рашидова Е. В., Борисова Е. В.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*

b.sobol@mail.ru

Представлены результаты исследования задачи о концентрации напряжений в окрестности вершин трещины конечной длины, расположенной перпендикулярно границе раздела двух упругих тел — полуплоскости, в которой имеется трещина, и полосы. Использование метода обобщенных интегральных преобразований позволило свести задачу к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши. Рассмотрены предельные случаи задачи, когда толщина полосы относительно мала, равна нулю (свободная полуплоскость) и, наоборот, бесконечно широка (составная плоскость). Решение интегрального уравнения построено методом коллокации и методом малого параметра. Для решения общей задачи использовалась аппроксимация регулярной части ядра интегрального уравнения. В качестве аппроксимирующей функции принята специальная функция, имеющая структуру ядра задачи о составной плоскости, ослабленной аналогичной внутренней трещиной, с неопределенными коэффициентами. Предложенная структура аппроксимирующей функции обеспечивает необходимую точность и позволяет выписать явно регулярную часть ядра и получить аналитическое решение задачи в виде асимптотического разложения в ряд по малому параметру. Кроме того, предложенная аппроксимация существенно улучшает технологию построения решения сингулярного интегрального уравнения по методу коллокаций. Получены значения коэффициента интенсивности нормальных напряжений в окрестности вершин трещины для различных комбинаций геометрических и физических параметров задачи.

В результате проведенного асимптотического и численного анализа результатов установлено:

1. С увеличением относительного размера трещины, снижением жесткости или толщины покрытия, значения фактора влияния (приведенного коэффициента интенсивности нормальных напряжений) возрастают.
2. Для более жестких покрытий, по сравнению с основным материалом, наблюдается следующий эффект: для достаточно больших относительных толщин покрытия, наличие покрытия является сдерживающим фактором (значение фактора влияния меньше 1); по мере уменьшения толщины покрытия, фактор влияния становится больше 1. Расчеты проведены, в частности, для случая, когда основной материал — конструкционная сталь, а материал покрытия — вольфрам.
3. Проведено исследование практической сходимости обоих методов. Установлены диапазоны их эффективности по геометрическим и физическим параметрам.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-08-00142\_а.

## Моделирование неоднородно поляризованных пьезоэлементов устройств накопления энергии

Соловьев А. Н.<sup>1</sup>, Скалиух А. С.<sup>2</sup>, Оганесян П. А.<sup>2</sup>, Лесняк О. В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*

<sup>2</sup>*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

solovievarc@gmail.com

В работе рассматривается подход к моделированию пьезопреобразователей с неоднородной поляризацией сложной структуры. Рассматривались двухслойные и трехслойные полупассивные пьезопреобразователи с различными конфигурациями электродов в плоской и осесимметричной постановках. Решены статические задачи, задачи на собственные значения и построены амплитудно-частотные характеристики изучаемых преобразователей в случае вынужденных колебаний. Расчеты производились в конечно-элементных комплексах ACELAN и ANSYS. В качестве материала активного слоя были рассмотрены различные образцы пьезокерамики.

В ходе численных экспериментов были выявлены схемы создания предварительной поляризации, использующие технологические электроды, и позволяющие получить существенный прирост коэффициента электромеханической связи пьезопреобразователя, увеличить ширину полосы пропускания. Для ряда моделей были решены задачи с подключением биморфа к активному сопротивлению. Определены структуры неоднородной поляризации, при которых был достигнут ощутимый прирост электрического напряжения, возникающего в цепи при механическом возбуждении колебаний преобразователя.

Были определены закономерности, связанные с изменением геометрических размеров преобразователя, геометрии электродного покрытия, значения активного сопротивления. Представлены различные подходы к моделированию неоднородной поляризации. Для приближенного учета влияния неоднородной поляризации на электромеханические свойства тела предлагается производить разбиение тела на подобласти, внутри которых угол поворота вектора поляризации является неизменным. Для точной оценки количественных показателей используется набор модулей комплекса ACELAN для определения векторного поля поляризации и моделирования тел с произвольными неоднородностями.

В работе даются рекомендации по наведению требуемой предварительной поляризации в виде схем электродирования отдельных слоев биморфа. Предлагаются схемы для различных типов поляризационных установок.

Кроме решения технической проблемы повышения эффективности пьезопреобразователей, результатом работы является набор инструментов комплекса ACELAN, предназначенных для моделирования неоднородно поляризованных пьезоэлементов, а также программы на языке APDL ANSYS, позволяющие проводить сравнение результатов для одного из методов, используемых в комплексе ACELAN.

Работа частично поддержана РФФИ (гранты 13-01-00943, 13-08-01094)

## Двухэтапный алгоритм оптимизации в обратных задачах со сложной целевой поверхностью

**Соловьев А. Н., Баранов И. В., Галаджева М. Р.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
solovievarc@gmail.com

Проблема поиска глобального оптимума функции  $n$  переменных в заданной области возникает во многих прикладных задачах. При этом целевая функция  $F$  может иметь весьма сложный рельеф. В последнее время большую популярность приобретают методы, основанные на эволюционных вычислениях, в частности генетические алгоритмы (ГА). Однако, наряду с большими преимуществами, классические ГА имеют ряд недостатков, таких как возможность застревания в локальных оптимумах, а также весьма медленная сходимость, особенно на последних этапах работы. В работе рассмотрен вариант эволюционного метода поиска глобального оптимума, использующий для локального поиска оригинальный, быстрый, схожий с генетическим, алгоритм, описанный в (Hu XM, Zhang J, Li Y. Journal of computer science and technology 23(1): 2–18 Jan. 2008). В данной работе используется его упрощенная версия — из генетических операторов были оставлены только операторы кроссовера и мутации. В области поиска случайным образом создаются  $m$  подобластей. Каждой подобласти приписывается значение  $F$ , вычисленное в ее центре. Случайно выбирается подобласть, и в ней осуществляется локальный поиск с помощью ГА. Если в этой подобласти найдено решение лучше, чем приписано этой подобласти, то центр подобласти переносится в найденную точку, и размер подобласти увеличивается в Expand раз, чтобы осмотреть ближайшие окрестности. Если же локальное лучшее решение не найдено, то размер подобласти уменьшается в Shrink раз, чтобы “увидеть” рельеф в более мелких деталях. Если размер подобласти становится меньше заданной абсолютной EpsA или относительной EpsR точности, то такая подобласть уничтожается, и на ее месте создается новая случайная подобласть. Лучшее глобальное найденное решение запоминается. Процесс вычислений завершается при условии превышения MaxFuncCount лимита вычислений значений  $F$ .

В вычислительном эксперименте было принято Expand=3, Shrink=10, m=1..5. Параметры ГА: число особей в популяции 10, число эпох 10, размер гена 8...10 бит, вероятность кроссовера 1, вероятность мутации 1. В среднем 1 локальный поиск с помощью ГА требовал примерно 100 вычислений целевой функции. Минимизировались известные тестовые функции Розенброка (область поиска  $[-5, 5]^n$ ), Швифеля ( $[-500, 500]^n$ ) и Растригина ( $[-5, 5.13]^n$ ). При размерности задачи  $n=2$  и EpsA и EpsR порядка 0,1 ... 0,0001 для надежного нахождения глобального оптимума с запасом хватало MaxFuncCount = 5000 вычислений. С ростом размерности задачи MaxFuncCount необходимо увеличивать, в частности для  $n=4$  для функций Розенброка и Швифеля хватает лимита MaxFuncCount около 30000. При таком значении MaxFuncCount за время вычислений успевает возникнуть около 15-25 новых случайных подобластей. Для функции Растригина результат был хуже, чтобы ухватить глобальный оптимум при EpsA и EpsR = 0,1, требуется по меньшей мере MaxFuncCount=50000.

## К оценке критических воздействий внутренних волн в различных районах Мирового океана

Соловьева А. А.<sup>1</sup>, Григоренко К. С.<sup>1</sup>, Хартиев С. М.<sup>2</sup>, Матишов Д. Г.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ростов-на-Дону, Институт аридных зон ЮНЦ РАН

<sup>2</sup>Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет

solovievarc@gmail.com

Внутренние волны Мирового океана переносят большое количество энергии, в экваториальных районах Атлантического океана. Приливные полусуточные внутренние волны могут достигать амплитуды 70 м (Mogozov E.G. // Deep Sea Research, vol. 42, No 1, 1995, 135–148) и способствовать переносу значительных объемов водных масс, чем влияют на климатический режим приповерхностного слоя атмосферы и, как следствие, на глобальный климат в целом. Актуальной целью исследований является изучение пространственной и временной изменчивости внутренних волн в районах, где перенос придонных антарктических вод в экваториальные районы и севернее наиболее интенсивен. В связи с этим рассматриваются следующие задачи:

1) изучение базы данных STD-зондирования, полученную в результате экспедиций НИС «Академик Сергей Вавилов» и НИС «Академик Иоффе» в районы разломов и каналов Атлантического океана, где фиксируются интенсивные придонные течения (Морозов Е. Г., и др. // Океанология. 2013. том 53. №6. с. 851);

2) построение сезонных и межгодовых зависимостей гидрологического режима и выявление влияние полей температуры и солености на стратификацию водной массы океана в исследуемом районе.

С использованием метода конечных элементов (МКЭ) в САЕ пакетах и математического пакета MatLab, строятся дисперсионные кривые внутренних волн исследуемых полигонов. Получены полные наборы длин и периодов внутренних волн, описаны характеристики внутренних волн для суточного, полусуточного и других масштабов. С помощью программы МКЭ получены формы собственных мод для внутренних волн суточного, полусуточного и других периодов. Рассчитаны декременты затухания внутренних волн. Изучена диссипация внутренних волн и влияние турбулентной вязкости и диффузии плотности на затухание волнового процесса на выбранных полигонах. Выявлены закономерности сезонной и пространственной изменчивости кинематических характеристик внутренних волн на исследуемых полигонах и их взаимосвязь с гидрологическими факторами. В результате по данным STD-профилирования для исследуемых полигонов детально описаны кинематические характеристики внутренних волн в широком диапазоне частот, возможных при данной стратификации плотности океана. По этим данным предполагается построить карты пространственного вертикального и горизонтального распределения как гидрологических характеристик (температура, соленость), так и рассчитанных элементов гидродинамики океана (внутренние волны, течения). Определена взаимосвязь между различными компонентами динамики водных масс океана, такими как внутренние волны, течения на разных горизонтах, приливные движения. Полученные результаты позволят проанализировать взаимное влияние различных динамических факторов и выработать закономерности их формирования.

## Методы решения задач о колебаниях тросов переменной длины

**Столяр А. М., Муталибов Г. С.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

ajoiner@mail.ru

В работе исследуются начально-краевые задачи, моделирующие продольные и продольно-поперечные колебания троса переменной длины. Развиваются асимптотический и численные методы решения. При асимптотическом интегрировании в качестве малого параметра  $\varepsilon$  используется отношение скорости изменения длины троса к скорости распространения волны в тросе. Задача о продольных колебаниях троса переменной длины (трос наматывается на катушку или сматывается с неё) с грузом на конце может быть записана в виде

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + P(\varepsilon, t) = \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Big|_{x=0} + P(\varepsilon, t) = \beta \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad v \Big|_{t=0} = \Phi_1(x), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \Phi_2(x), \quad \ell(t) = \ell_0 + \varepsilon \cdot \ell_1(t), \quad \ell_1(t) = \int_0^t \psi(\tau) d\tau, \quad v \Big|_{x=\ell(t)} = 0.$$

Здесь  $\ell(t)$  — длина троса в недеформированном состоянии,  $\varepsilon\psi(t)$  — скорость изменения длины троса. Задача (1) содержит малый параметр  $\varepsilon$  как в уравнении, так и в краевых условиях, причём на краю  $x = \ell(t)$  он входит в выражение для самой границы. Применяя метод асимптотического интегрирования, решение задачи (1) строим в виде

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, t) \varepsilon^k \quad (2)$$

и для функций  $v_k(x, t)$  получаем начально-краевые задачи уже на постоянном отрезке. Решение, полученное методом асимптотического интегрирования с использованием формул (2), реализовано в виде программы для сравнения с результатами численного интегрирования.

Численные методы являются модификациями методов конечных разностей (МКР) и Рунге—Кутта. При использовании МКР вводится подвижная сетка, расположение узлов которой меняется со временем; при этом приходится вычислять значения неизвестной функции в так называемых виртуальных узлах. При использовании метода Рунге—Кутта исходная начально-краевая задача на изменяющемся временном отрезке сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения задачи о продольно-поперечных колебаниях троса переменной длины также применяются описанные выше подходы. Данная задача рассматривается в плоской постановке и является нелинейной. Проводится успешное сравнение результатов асимптотического и численного интегрирования.

## Модели многокритериальной оптимизации конструкций нефтедобывающих платформ

Сторожев В. И.<sup>1</sup>, Буй Тхань Нам<sup>2</sup>, Нгуен Куанг Хиеу<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Донецкий национальный университет*

<sup>2</sup>*Вунгтау, Акционерная компания «Проектирование и строительство нефтегазовых объектов Фуши» FUJI EC*

<sup>3</sup>*Вунгтау, Компания морских нефтегазовых сервисов PTSC MC*  
stvi@i.ua

Проектирование надежных и экономичных конструкций нефтедобывающих платформ по целому ряду аспектов связано с анализом сложных задач многокритериальной оптимизации. Это в полной мере относится и к проблеме проектирования палубных несущих конструкций платформ с размещенным на них оборудованием и вспомогательными сооружениями. В качестве элементов множества ведущих критериев оптимизации конструкций этого типа выступают, в частности, факторы увеличения степени надежности за счет снижения уровней динамических напряжений в различных зонах палубной конструкции, уменьшения общей массы несущей палубной конструкции при сохранении ее прочностных характеристик, снижения интенсивности вибрационных воздействий на размещаемые узлы оборудования и специализированные сооружения, обеспечения оговоренной пропорциональности реакций опор, локализации положения центра тяжести и т. д.

С учетом того, что расчетными моделями палубных конструкций нефтедобывающих платформ являются тонкие упругие плиты с ребрами жесткости, системами присоединенных масс и локализованными зонами опорных контактов, управляющими характеристиками оптимизационных задач являются, в частности, параметры жесткости несущей палубной плиты, деформативные механические свойства и способ размещения ребер жесткости, параметры размещения сооружений и оборудования, геометрические и механические параметры системы опор и т. д.

Представляемые в данной работе исследования посвящены созданию одного из возможных вариантов прикладной модели многокритериальной оптимизации параметров несущих палубных конструкций нефтедобывающих платформ, базирующегося на концепции многоуровневого иерархического оценивания в разветвленных системах с экспертно ранжированными нечеткими частными критериями. По применяемой методике показатели принадлежности характеристик рассматриваемой альтернативы к нечетким интервалам желательности для оценочных критериев исходного иерархического уровня определяются на основе решений краевых задач о динамическом напряженно-деформированном состоянии палубной конструкции в виде конструктивно-анизотропной тонкой плиты с присоединенными массами и локальными опираниями. Глобальный интегральный критерий качества палубной несущей конструкции определяется на следующих этапах анализа.

Представлены примеры реализации предлагаемой прикладной теоретико-экспертной модели в процессе проектирования палубных несущих конструкций нефтедобывающих платформ, имеющих прямоугольную форму.

## Моделирование эффектов стохастических нагружений на палубные конструкции нефтедобывающих платформ

Сторожев В. И.<sup>1</sup>, Нгуен Куанг Хиеу<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Донецкий национальный университет*

<sup>2</sup>*Вунгтау, Компания морских нефтегазовых сервисов PTSC MC*

stvi@i.ua

Системный анализ функциональных характеристик современных морских нефтедобывающих комплексов в процессе проектирования и эксплуатации в качестве важнейшего элемента включает проблему оценки динамической деформационной надежности нефтедобывающих платформ. Морские нефтедобывающие платформы представляют собой сложные конструкционные комплексы, включающие систему ответственных несущих надводных элементов палубного типа с размещенным на них оборудованием и сооружениями производственного и непроизводственного назначения. В реальных эксплуатационных режимах палубные конструкции нефтедобывающих платформ (ПКНП) находятся под действием сложной системы динамических усилий, обусловленных волнением моря, интенсивными ветровыми нагрузками и вибрационными воздействиями, связанными с производственными процессами. Комплексы указанных нагружений в совокупности имеют стохастический характер.

В расчетных моделях ПКНП, как правило, представляют собой тонкие снабженные системами ребер жесткости однослойные либо многослойные плиты, обладающие конструкционной анизотропией деформационных свойств. Математическое моделирование эффектов действия комплексных нагружений на ПКНП соответственно связано с развитием подходов к решению задач о характеристиках динамического напряженно-деформированного состояния тонких плит при стохастических упругих колебаниях в различных усложненных постановках.

В данном контексте, целью представляемых исследований явилось обобщение концептуальных подходов к анализу стохастических колебаний тонких плит на случаи конструктивно ортотропных многосвязных плит с присоединенными массами и точечными опорами. С использованием методики введения импульсных функций жесткости сформулированы дифференциальные уравнения стохастических колебаний прямоугольных и круглых плит с системами присоединенных масс и точек локального опирания. Построены корреляционные функции для амплитудных характеристик колебаний многосвязных анизотропных плит с технологическими вырезами, присоединенными элементами и точечными опорами. В контексте применения к рассматриваемому классу задач теории марковских процессов осуществлен анализ плотностей распределений вероятностей для амплитуд и скоростей динамических прогибов, плотностей распределений вероятностей для напряжений и скоростей изменения напряжений в колеблющихся многосвязных анизотропных плитах с присоединенными массами и точечными опорами. Описаны и исследованы теоретические характеристики статистической прочности ПКНП с несколькими схемами расположения присоединенных элементов и зон опорного крепления, а также варьируемыми величинами приведенных усредненных упругих постоянных, рассчитываемых для различных вариантов расположения и механических свойств ребер жесткости.

## Нечеткие оценки характеристик упругих волн в анизотропных средах

**Сторожев С. В.***Донецкий национальный университет*

CergeyS@i.ua

Практическое прикладное использование теоретических методов оценки ведущих характеристик линейных гармонических упругих волн в анизотропных средах, относящихся к всевозможным классам симметрии механических свойств, в частности методов определения дисперсионных зависимостей, фазовых и групповых скоростей, плотностей потоков мощности, форм колебательных движений для объемных, поверхностных и нормальных волн, в большинстве случаев сопряжено с необходимостью учета различной степени неопределенности, разброса значений реальных физико-механических параметров среды распространения. Ведущими современными методологиями учета эмпирических факторов неопределенности в моделях физических процессов являются использование теоретико-вероятностных статистических подходов и применение аппарата теории нечетких множеств. Указанные методологии имеют различную степень разработанности применительно к проблемам волновой механики анизотропных деформируемых сред.

В данном контексте целью представляемых исследований является нечетко-множественное обобщение ряда методик расчета характеристик линейных объемных, поверхностных и нормальных упругих волн на случаи нечетко-интервальных представлений для физико-механических параметров анизотропных деформируемых сред. Полученные результаты базируются на аналитических соотношениях для расчета характеристик рассматриваемых классов волновых процессов и заключаются в использовании модифицированного эвристического принципа обобщения четких алгоритмов поиска эндогенных параметров математических моделей на случаи нечетких определяющих факторов.

С применением описанного подхода получены нечетко-множественные представления для скоростей объемных гармонических волн деформаций, распространяющихся вдоль произвольного направления в анизотропной упругой среде триклинного класса механической симметрии с нечетко-интервальными характеристиками модулей упругости и параметра плотности. Получены нечетко-множественные представления для скоростей поверхностных волн релеевского типа в полубесконечных анизотропных средах некоторых классов симметрии с нечеткими физико-механическими характеристиками. Реализован вывод представлений для нечетких характеристик волновых чисел, фазовых и групповых скоростей и форм колебательных упругих перемещений в симметричных и антисимметричных нормальных сдвиговых волнах, распространяющихся вдоль анизотропного слоя гексагонального класса. Во всех рассмотренных случаях искомые нечеткие характеристики анализируемых волновых процессов выражены через реперные точки трапецидальных нечетких интервалов, описывающих экзогенные физико-механические параметры. Представлены примеры реализации описываемого подхода при определении нечетких характеристик волновых процессов в анизотропных геоматериалах.

## Обучение нейросетевых решателей краевых задач расчета магнитного поля в кусочно-однородных средах

**Ткачев А. Н., Назаров А. С.**

*Новочеркасск, Южно-российский государственный политехнический университет (НПИ) им. М.И. Платова*

npi\_pm@mail.ru

Задача расчета потенциальных физических полей в кусочно-однородных линейных средах, а также в нелинейных средах при структурном блочно-линейном их приближении сводится к решению краевых задач для уравнения Лапласа в выделенных областях разбиения. Для решения таких задач предложено использовать бессеточный метод нейросетевого моделирования. В каждой выделенной области решение с учетом его единственности однозначно определяется заданными граничными условиями. При аппроксимации граничных условий с использованием конечного числа базисных функций, например, при кусочно-линейной аппроксимации, решение  $u = u(x, y)$  в каждой точке расчетной области с заданными координатами  $x, y$  можно рассматривать как функцию  $n + 2$  переменных, в качестве аргументов которой кроме координат  $x, y$  выступают найденные из граничных условий значения  $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ :

$$u = F(x, y, \bar{u}), \quad (1)$$

где  $n$  — число узлов на границе

Краевая задача относительно искомого потенциала решается, как задача нейросетевой аппроксимации (1) с использованием специальным образом организованной эффективной процедуры обучения нейросетевого решателя. Для обучения нейронной сети используются гармонические базисные функции  $e_i(x, y)$ , в том числе, учитывающие особенности решения в угловых точках расчетных областей. Кроме этого, для обеспечения требуемой точности предложено использовать два альтернативных подхода организации процесса обучения.

Согласно первому, решение, найденное в нескольких дополнительно введенных внутренних узлах расчетной области с использованием бессеточного метода Монте—Карло, включается в обучающую выборку. В соответствие со вторым подходом формируется линейная комбинация, содержащая небольшое число базисных функций  $e_i(x, y)$ , в некотором смысле близкая к искомому решению. Это обеспечивается тем, что ее коэффициенты находятся методом коллокаций из граничных условий при фиксированном наборе узловых точек на границе. Далее для обучения используются значения линейной комбинации, найденное во внутренних точках расчетной области.

Выполненные численные эксперименты подтвердили возможность применения обоих подходов для решения краевых задач с использованием нейросетевых бессеточных решателей. Приводятся результаты оценки погрешности, а также результаты выполненных расчетов магнитного поля в технических системах.

Результаты работы получены при поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на проведение НИОКР, шифр заявки № 2819.

## Задача о колебаниях функционально-градиентного полого цилиндра

**Углич П. С.***Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

puglich@inbox.ru

Рассмотрена задача о вынужденных колебаниях упругого цилиндра, упругие характеристики которого (плотность и модуль сдвига) являются функциями радиальной координаты. После применения преобразования Фурье и разложения компонент перемещения и напряжений в ряд Фурье по окружной координате задача в трансформантах сведена к краевой задаче для канонической системы дифференциальных уравнений. Приведены краевые задачи для осесимметричных, крутильных и изгибных колебаний полого цилиндра. В полученной краевой задаче неизвестными являются амплитуды перемещения и напряжений и она не содержит производных механических параметров и, следовательно, может использоваться для любых законов неоднородности.

Приведены дисперсионные кривые для крутильных и осесимметричных колебаний и произведено их сравнение с известными результатами. Также приводятся расчёты волновых полей при различных частотах колебаний, для различных геометрических параметров и законов неоднородности. При этом для отыскания обратного преобразования Фурье использованы два метода. Первый из них основан на решении краевой задачи методом пристрелки и непосредственном численном отыскании интеграла при помощи квадратурных формул.

Второй — основан на теории вычетов. При использовании теории вычетов используется тот факт, что особенности подынтегральной функции являются полюсами первого порядка. Само подынтегральное выражение представляет из себя соотношение двух функций, значение которых известно лишь численно и выражения для которых следуют из формул метода пристрелки. Знаменатель подынтегрального выражения совпадает с дисперсионным уравнением. Для отыскания вычетов использована обычная формула для вычетов в полюсе первого порядка, построена вспомогательная краевая задача для отыскания производной знаменателя по параметру преобразования Фурье. Приведён ряд расчётов волновых полей и указаны границы применимости обоих подходов.

Далее рассмотрена обратная задача: найти законы изменения механических параметров по данным о волновом поле на внешней поверхности полого цилиндра. Построены итерационные последовательности интегральных уравнений и приведены результаты их численного решения в случае крутильных колебаний. Построенные интегральные уравнения являются интегральными уравнениями Фредгольма первого рода и их решение требует использования специальных численных методов.

## Расчетное и экспериментальное исследование стационарных и пульсирующих закрученных течений в модели сосуда со стенозом

**Федорова Е. А., Гатаулин Я. А.**

*Санкт-Петербургский государственный политехнический университет*  
ekf5va@gmail.com

Расчетное и экспериментальное исследование стационарных и пульсирующих закрученных течений в модели сосуда со стенозом. До сих пор остается невыясненной влияние закрученного течения крови на атеросклеротические процессы. Цель работы – исследовать незакрученное и закрученное стационарное и пульсирующее течения в модели сосуда со стенозом с помощью ультразвукового доплеровского метода и сопоставить его результаты с результатами численного моделирования.

Для экспериментального исследования течения была создана установка, представляющая собой замкнутый гидравлический контур с подключенным к нему центробежным насосом. Насос работал в режимах с постоянным и пульсирующим расходом. Модель сосуда представляет собой силиконовую трубку со стенозом – плавным местным сужением. Асимметричный стеноз описывается по гармоническому закону, степень сужения, рассчитанная по площади, составляет 75%. В любом поперечном сечении просвет сосуда представляет собой окружность. Для создания закрутки потока использовался специальный завихритель – скрученная лента, представляющая собой закрученную в виде спирали пластину, помещенную на входе в модель сосуда. Отношение максимальных окружной и осевой скоростей в течениях на выходе из ленты составляло около 0.2. Экспериментальное исследование проводилось с помощью ультразвукового доплеровского метода.

Расчеты были проведены на основе уравнений Навье-Стокса. На входе в расчетную область задавался расход и профиль скорости, полученные из эксперимента, на выходе – постоянный уровень давления, на стенках – условие прилипания. Свойства жидкости соответствовали экспериментальным условиям. Число Рейнольдса для стационарного течения, посчитанное по диаметру сосуда и средней скорости на входе, составляло 660, максимальное число Рейнольдса пульсирующего течения – 1500. Решение численной задачи проводилось с использованием конечно-объемного пакета ANSYS CFX 14.

В стационарном и пульсирующем течениях на выходе из скрученной ленты формируются две переплетающиеся между собой струи. Эксперимент и расчет показали, что стеноз разрушает данную структуру течения, значительно ослабляя интенсивность закрутки. За стенозом образуются две отрывные зоны рециркуляции, расположенные последовательно на противоположных стенках сосуда. В стационарном течении под действием закрутки потока обе зоны рециркуляции смещаются относительно центральной плоскости модели сосуда, подстраиваясь под искривленные линии тока. Пульсирующий характер течения жидкости приводит к тому, что размер зон рециркуляции непостоянен во время цикла. Их длина достигает максимального значения примерно в середину фазы уменьшения расхода. При сравнении закрученных и незакрученных потоков было выяснено, что закрутка не влияет на длину зон рециркуляции в фазу увеличения расхода, но уменьшает их общую длину в фазу уменьшения расхода.

Нестационарное контактное взаимодействие тонкой упругой цилиндрической оболочки с заполнителем и упругого полупространства

**Федотенков Г. В.<sup>1</sup>, Тарлаковский Д. В.<sup>2</sup>, Бугаев Н. М.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*

<sup>2</sup>*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
greghome@mail.ru*

В начальный момент времени тонкая упругая круговая цилиндрическая оболочка, заполненная сплошной упругой средой входит в контакт с линейно упругим однородным изотропным полупространством. Первоначально контакт происходит по образующей граничной поверхности оболочки, что приводит к плоской постановке задачи. Все точки оболочки и заполнителя обладают одинаковой начальной скоростью, вектор которой направлен по нормали к свободной поверхности полупространства. Полагаем, что контакт между оболочкой и полупространством, а также между оболочкой и заполнителем происходит в условиях свободного проскальзывания.

Для описания движения оболочки используются уравнения плоского движения модели С. П. Тимошенко, записанные в системе координат, связанной с линиями главных кривизн. Движение полупространства и заполнителя описывается уравнениями движения плоской теории упругости в потенциалах упругих смещений. Перемещения, деформации и напряжения связаны с упругими потенциалами известными соотношениями.

Для получения системы разрешающих уравнений решения задачи используется принцип суперпозиции, согласно которому перемещения границ полупространства и заполнителя связаны с контактными напряжениями посредством интегральных операторов, ядрами которых являются функции поверхностного влияния. Для оболочки также справедливо аналогичное интегральное соотношение. Это позволяет свести поставленную задачу к разрешающей системе, которая состоит из двух интегральных уравнений и дополнительных соотношений для определения положения границ области контакта. Основные интегральные уравнения вытекают из принципа суперпозиции и граничных условий. При этом для заполнителя граничные условия ставятся в перемещениях, а для полупространства имеет место смешанный тип граничных условий. Ядрами интегральных операторов основных уравнений являются функции влияния.

Область контакта между оболочкой и полупространством в линейной постановке задачи заменяется плоской областью, принадлежащей невозмущенной поверхности полупространства. Ее границы определяются из условия пересечения недеформированных поверхностей оболочки и преграды. При этом в систему разрешающих уравнений необходимо привлекается уравнение движения оболочки с заполнителем как абсолютно твердого тела.

Разработан алгоритм решения полученной системы, основанный на методе квадратур.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-08-01051\_a).

## Вариант метода вихрей в ячейках для расчета плоских течений идеальной несжимаемой жидкости

**Филимонова А. М., Говорухин В. Н.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

a.mishaylovna@gmail.com

Часто для исследования движений атмосферы и порождаемых ими явлений массопереноса эффективным оказывается изучение уравнений идеальной несжимаемой жидкости в геофизических приближениях. В настоящей работе предложен вариант метода вихрей в ячейках для расчета динамики вихревых течений в прямоугольной области со сторонами  $a$  и  $b$ , на границах которой заданы периодические краевые условия. Такая формулировка часто применяется при численном моделировании вихревых течений в неограниченных областях.

Рассматривается математическая модель, состоящая из двух уравнений в частных производных

$$\frac{D\omega}{Dt} \equiv \omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = 0, \quad \omega = -\Delta\psi + \Lambda^2\psi - \frac{1}{2}\gamma r^2. \quad (1)$$

Здесь  $t$  — время,  $x, y$  — координаты на плоскости,  $\gamma, \Lambda$  — параметры, а  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  — полярный радиус. Первое уравнение описывает пассивный перенос завихренности  $\omega$ , а второе уравнение связывает сохраняемую величину  $\omega$  и функцию тока  $\psi$ . К системе уравнений (1) следует добавить периодические условия для  $\psi$  и  $\omega$ , а также начальное условие для  $\omega$ .

В основе представленного метода расчета лежат следующие положения.

- Поле функции завихренности  $\omega(x, y)$  задано значениями в  $N$  частицах.
- Частицы переносят завихренность пассивно с течением времени  $t$ . Их динамика описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:  $\dot{x} = v^{(x)}, \dot{y} = v^{(y)}$ , где точка — дифференцирование по  $t$ .
- Поле скорости частиц  $\mathbf{v} = (v^{(x)}, v^{(y)})$  определяется  $\psi$ :  $v^{(x)} = -\psi_y, v^{(y)} = \psi_x$ .
- Функция  $\psi$  в каждый момент времени  $t$  приближается отрезком ряда Фурье  $\psi \approx \sum_{i=1}^{k_x} \sum_{j=1}^{k_y} \psi_{ij}(t) g_{ij}(x, y)$ , где  $g_{ij}(x, y)$  — тригонометрические функции.
- Неизвестные коэффициенты  $\psi_{ij}(t)$  находятся в результате применения метода Бубнова—Галеркина ко второму уравнению системы (1). При проектировании на базисные функции  $g_{ij}(x, y)$  распределение  $\omega(x, y)$  приближается с помощью двумерной кусочной аппроксимации кубическими полиномами, коэффициенты которой находятся методом наименьших квадратов.

Описанная численная схема реализована на языке C++, для расчета динамики частиц использовались различные методы Рунге—Кутты, проведен экспериментальный анализ их эффективности. В докладе представлены результаты тестовых расчетов динамики классических вихревых конфигураций — вихря Рэнкина и диполя Ламба.

Работа поддержана РФФИ, код проекта 14-01-00470.

Волны малой амплитуды в многослойных вязкоупругих трубках:  
взаимодействие стеночных и жидкостных мод

**Филиппова Е. Н., Кизилова Н. Н.**

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина*

*helenfilippova@yahoo.co.uk*

Распространение волн по заполненным жидкостью многослойным вязкоупругим трубкам исследуется в связи с актуальными проблемами биомеханической интерпретации кривых колебаний давления  $p(t)$  и скорости  $V(t)$  кровотока, зарегистрированных с помощью различных датчиков в артериях. Новые подходы к традиционной пульсовой диагностике позволяют разделять кривые  $p(t)$  и  $V(t)$  на падающую и отраженную компоненты, выявлять участки с положительным и отрицательным отражением, вычислять расстояние до мест с аномальным отражением (стенозы, аневризмы, нарушения микроциркуляции). Многие аспекты такого рода задач в одномерной (плоские волны) и двумерной (цилиндрические волны) постановках хорошо изучены, в то время как распространение волн по трубке из биоактивного материала исследовано недостаточно полно. Средний слой стенок артерий проявляет биоактивные свойства за счет содержания в них гладкомышечных клеток, которые могут сокращаться в ответ на различные стимулы и изменять площадь просвета, толщину и жесткость стенки, обеспечивая определенные режимы течения крови. Задача о дисперсии волн в артериях как однослойных вязкоупругих трубках достаточно детально исследована, в том числе в связи с использованием в медицинской диагностике. В данной работе исследуются особенности, связанные с наличием многослойной биоактивной стенки.

Формулировка задачи основана на уравнениях Навье—Стокса для несжимаемой жидкости и уравнениях теории вязкоупругости для несжимаемой стенки трубки. Для материала слоев стенки принималось реологическое соотношение обобщенного вязкоупругого тела Кельвина—Фойхта. Для замыкания системы использовалось уравнение баланса концентрации активатора (ионов кальция). В работе исследована задача о распространении малых возмущений. Решение выписано в виде нормальных мод, получено и исследовано дисперсионное соотношение. Выделены жидкостные и стеночные моды. Первые возникают в жидком столбе в отсутствие многослойной стенки, а вторые — в толстостенной многослойной трубке, не заполненной жидкостью. По сравнению с пассивной трубкой получен намного более широкий спектр волн Ляме. Численные расчеты скоростей волн проведены с использованием величин, характерных для системы кровообращения человека, реологических параметров крови и вязкоупругих слоев стенки артерии при расслабленных и напряженных гладкомышечных клетках. Обсуждается возможность взаимодействия волн, распространяющихся с разными скоростями в жидкости и стенке и влияющих на зависимости давление—скорость, волновую проводимость трубки, вязкое трение на стенке и расход жидкости. Приведены результаты компьютерного моделирования при вариации параметров модели в широком диапазоне, соответствующем норме и различным патологиям системы кровообращения.

## Волновые процессы в периодических и полупериодических упругих структурах

**Фоменко С. И.**

*Краснодар, Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет  
sfom@yandex.ru*

Композитные материалы из-за особого сочетания входящих в их состав разномодульных составляющих обладают порой уникальными механическими свойствами. Состав композитного материала может быть очень разнообразным, структура, обычно, периодическая или со слабыми стохастическими отклонениями от периодичности. Композитные материалы имеют как природное, так и искусственное происхождение. Типичными представителями являются ячеистые упругие материалы, образующие, например, внутренние ткани губчатых костей. Примером искусственных материалов, получивших в недавнее время широкое распространение является вспененные металлы, обладающие повышенными свойствами легкости, прочности, а также высокими энергопоглощающими характеристиками.

С позиции волновой динамики для упругого материала с периодической структурой в мировом научном сообществе закрепилось название фононный кристалл. В фононных кристаллах наблюдаются необычные волновые явления, такие, например, как запрещенные зоны в высокочастотных диапазонах колебаний, в которых падающая на фононный кристалл упругая волна, практически полностью отражается или поглощается периодической структурой, и, как следствие, могут наблюдаться явления отрицательная рефракция, конвертация мод и др. На расположение и размеры запрещенных зон сильное влияние оказывает, как внутренняя структура, так и упругие свойства материалов ячейки фононного кристалла. Поэтому диаграмма запрещенных зон может служить основой для ультразвуковой диагностики периодических структур и материалов биологического и искусственного происхождения.

Представляются результаты математического моделирования волновых процессов в многослойных периодических упругих структурах с плоскопараллельными и цилиндрическими границами, на примере которых исследуются запрещенные и разрешенные зоны в периодических и полупериодических средах. Гармоническое волновое поле строится с помощью метода плоских волн и численно устойчивых матричных алгоритмов. Обсуждаются подходы к моделированию таких двумерных фононных кристаллов, как губчатые материалы. Приводятся результаты численного параметрического анализа влияния изменений упругих и структурных свойств ячеек кристалла на положение и размеры запрещенных и разрешенных зон различного типа. Отдельно исследуется влияние случайных отклонений в периодичности параметров кристалла на волноводные свойства рассматриваемых упругих структур.

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки РФ (грант Президента 14.Z56.15.7154МК) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект №14-01-3123614\_мол\_а).

## Анализ напряженно-деформированного состояния тканей прямой кишки человека

**Хайдарова Л. Р., Коссович Л. Ю.**

*Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского*  
liyanahaidarova@gmail.com

Каждый второй житель социально развитых стран страдает различными заболеваниями толстого кишечника. Несвоевременное обращение пациента к квалифицированному специалисту приводит к риску развития опасных для жизни осложнений. Значительная часть всех заболеваний толстого кишечника приходится на его последний отдел — прямую кишку. Многие из них, такие как воспаление геморроидальных узлов, трещины, проктит и др. способствуют формированию злокачественных новообразований. Ежегодно в мире данное заболевание диагностируется у 600 тысяч человек. Среди всех опухолей желудочно-кишечного тракта рак прямой кишки составляет 45%.

Построение трехмерной модели прямой кишки, учитывающее ее анатомические особенности, было реализовано в программном комплексе SolidWorks. Конечно-элементное моделирование процессов, проходящих в прямой кишке, было проведено в Ansys Workbench. Материал стенки предполагался линейным, однородным, изотропным и идеально-упругим с механическими характеристиками: 1 МПа (модуль Юнга), 0.49 (коэффициент Пуассона) и 1378 кг/м<sup>3</sup> (плотность). Хумус (содержимое прямой кишки) был принят как однородная несжимаемая ньютоновская жидкость с плотностью 970 кг/м<sup>3</sup> и динамической вязкостью 0.01 Па·с.

В результате численного эксперимента были получены картины напряженно-деформированного состояния стенки, значения давления и поля перемещений химуса в полости прямой кишки. Выявлено, что максимальные значения поля скоростей химуса сосредоточены в зоне перехода сигмовидной кишки в прямую, а также в заднепроходном канале. Давление химуса распределяется равномерно по всей модели и соответствует давлению критического уровня 30–40 мм. рт. ст. (Bassotti G. et al., 2005), когда возникает чувство наполнения прямой кишки. Наибольшие значения эквивалентных напряжений и поля перемещений расположены между верхней и средней поперечными складками. Это явление обусловлено тем, что по данным манометрии этот участок прямой кишки обладает наибольшей двигательной активностью.

Результаты данной работы в дальнейшем будут применяться для конечно-элементного моделирования прямой кишки при различных видах патологий и после проведения хирургического лечения. Так же планируется проведение серии собственных натурных экспериментов для определения механических характеристик тканей прямой кишки. Последнее позволит исследовать напряженно-деформированное состояние стенки прямой кишки с учетом нелинейности материала.

Численное исследование структуры потока  
в новом полнопроточном искусственном клапане сердца МедИнж-СТ

**Хоробров С. В.<sup>1</sup>, Юхнев А. Д.<sup>1</sup>, Гатаулин Я. А.<sup>1</sup>, Курапеев Д. И.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Санкт-Петербургский государственный политехнический университет*

<sup>2</sup>*Санкт-Петербург, Северо-Западный федеральный медицинский  
исследовательский центр*

svyatoslav.khorobrov@gmail.com

В работе проведено исследование пульсирующего потока жидкости в механическом двустворчатом аортальном искусственном клапане сердца МедИнж-СТ, проходящего в настоящее время клинические испытания. В частности, рассчитаны распределения скоростей и сдвиговых напряжений в различные фазы работы клапана.

В отличие от известных двухстворчатых клапанов, таких как St. Jude Medical и МедИнж-2, у которых открытые створки разделяют поток на три струи, клапан МедИнж-СТ является полнопроточным — створки прилегают к цилиндрическому каркасу, полностью открывая проходное отверстие клапана.

Геометрия расчетной области соответствует геометрии аортальной камеры пульсодубликатора, в которой был предварительно испытан рассчитываемый клапан. Для расчёта построена двумерная сетка из  $2 \cdot 10^5$  треугольных элементов. Движение жидкости описывалось нестационарными уравнениями Навье—Стокса, осредненными по Рейнольдсу, в качестве замыкающего выражения была выбрана  $k-\omega$  SST модель турбулентности. Расчет проведен с использованием пакета ANSYS Fluent. Число Рейнольдса, оцененное по среднесистолической скорости и диаметру канала, составляет 7500. В качестве условия на входной границе задавался плоский профиль скорости, меняющийся во времени. Кривая расхода задавалась по измерениям датчиком электромагнитного расходомера при испытании клапана в пульсодубликаторе. В качестве условия на выходе задавалась пульсовая кривая давления по измерениям тензометрическим датчиком. Закон движения створок клапана определен по результатам видеорегистрации с частотой 50 кадров/с.

Расчеты показали, что в фазу систолы поток проходит через клапан без образования больших градиентов скоростей, деформирующих форменные элементы крови. Сдвиговые напряжения в фазу систолы в потоке между створками не превышают 0.1 Па. Внутренняя часть створок омывается высокоскоростным потоком, внешняя — медленным движением жидкости в рециркуляционной зоне, которая формируется в синусе корня аорты. В фазу диастолы жидкость движется через щели шарнирных механизмов крепления створок к корпусу клапана. Сдвиговые напряжения в струях достигают значения 20 Па, что на два порядка больше по сравнению со сдвиговыми напряжениями в систолу. Следовательно, такие струйные течения могут травмировать форменные элементы крови. С другой стороны, эти же струи препятствуют тромбообразованию в области шарниров и омывают створки со стороны входа клапана.

Таким образом, структура потока в новом отечественном клапане МедИнж-СТ предпочтительнее по сравнению с таковой в известных двухстворчатых механических протезах и ближе к потоку в естественном аортальном клапане.

## Программа-планировщик для челюстно-лицевой хирургии на базе открытого исходного кода

**Хрыков С. С., Борзенков В. А., Гаврюшин С. С., Козлов А. А.**

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*  
sergeykh@bmstu.ru

В последние годы среди хирургов различного профиля становятся популярны планирование и подготовка операций при помощи компьютера. Для этих целей существуют специализированные программы — так называемые CAS(S) (Computer-aided surgery (support)) системы. На рынке сегодня представлен ряд CAS иностранных производителей, например BrainLab CMF iPlan, Synthes PROPLAN CMF, Scopis Building Blocks. Помимо коммерческих систем есть также ряд открытых программ, которые, как правило, представляют собой «комбайны», то есть универсальные программы, дорабатываемые и расширяемые посредством модульного механизма (Slicer 3D, MITK). Основным препятствием для широкого использования в России в случае платных программ является их высокая стоимость, а в случае бесплатных — высокая сложность интерфейса и нестабильность работы вследствие невысокого качества кода. Мы приступили к разработке собственной системы для планирования операций в области челюстно-лицевой хирургии. В основу стратегии разработки были положены легкость освоения программы хирургами, широкое использование компонентов с открытым исходным кодом, а также мультиплатформенность. Мы решили отказаться от идеи создания "комбайна" и направить свои усилия на разработку максимально специализированного приложения.

С точки зрения функциональной структуры наше приложение состоит из ряда компонент: базы данных о пациентах, модуля ввода-вывода, блока геометрических функций и пользовательского интерфейса. По каждому пациенту в базе данных хранятся: персональные и антропометрические данные, сводку истории болезни, томограммы, трехмерные модели и планы операций. Доступ к базе защищен паролем. Модуль ввода-вывода выполняет считывание томограмм для просмотра и передачи данных в геометрический блок программы. Геометрический блок объединяет структуры данных и алгоритмы для манипуляций с трехмерными моделями. Для создания протезирующих конструкций сложной формы дополнительно используется библиотека твердотельного моделирования OpenCASCADE. Модуль пользовательского интерфейса, основанный на библиотеках VTK и Qt, способен отображать 2D- и 3D-объекты с поддержкой операций над ними. Дальнейшее развитие системы планируется сосредоточить вокруг задач челюстно-лицевого хирурга.

## Анализ устойчивости задачи электрофореза в случае решений, близких к разрыву

**Цывенкова О. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
olgaz@math.sfedu.ru

При исследовании процессов зонального электрофореза в различных смесях особый интерес вызывает поведение границы раздела между зонами и ее устойчивость (Жуков М. Ю. Массоперенос электрическим полем. Ростов-на-Дону. Изд-во РГУ, 2005). Рассматривается задача электрофореза в вязкой несжимаемой многокомпонентной смеси с учетом гравитационных эффектов. Для этой задачи построено решение, отвечающее механическому равновесию, и получена система для определения критических чисел потери устойчивости.

Система уравнений, описывающая поведение одной компоненты смеси под действием электрического поля, имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = -\sigma_0 (1 + \alpha c) \nabla \varphi, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{k} \beta c \quad (2)$$

$$\frac{dc}{dt} = \varepsilon \gamma \Delta c - P \mathbf{j} \cdot \nabla \left( \frac{c}{1 + \alpha c} \right), \quad P = \frac{\gamma z}{\sigma_0}. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — скорость смеси в целом,  $p$  — давление,  $c$ ,  $\mathbf{i}$  — концентрация и плотность потока компоненты смеси,  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока,  $\varphi$  — потенциал электрического поля,  $\sigma$  — проводимость раствора ( $\sigma_0$  — проводимость раствора при  $c = 0$ ),  $\mu$ ,  $\varepsilon$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  — коэффициенты кинематической вязкости, диффузии, концентрационного сжатия, влияния концентрации на проводимость смеси,  $\gamma$ ,  $z$  — подвижность и заряд компоненты смеси.

Найдено решение автомодельной задачи для концентрации компоненты смеси с условиями на  $\pm\infty$ :

$$\varepsilon \gamma c_0''(\xi) + V c_0'(\xi) - P j_0 \left( \frac{c_0}{1 + \alpha c_0} \right)' = 0, \quad \xi = x_3 - V t \quad (4)$$

Решение этой задачи представляет собой бегущую волну вдоль оси действия силы тяжести. Исследуется гидродинамическая устойчивость бегущей волны в линейном приближении и строятся нейтральные кривые потери устойчивости.

Автор выражает благодарность Жукову Михаилу Юрьевичу за постановку задачи и внимание к работе.

Нестационарное контактное взаимодействие  
в некоторых трибосистемах с учетом тепловыделения от трения

**Чебаков М. И., Ляпин А. А., Колосова Е. М.**  
*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
chebakov@math.rsu.ru

Важным фактором, влияющим на износ триботехнических систем является их нагрев, критическое значение которого ведет к изменению физико-механических свойств материалов в приповерхностных слоях взаимодействующих деталей узлов трения. При помощи конечно-элементного пакета ABAQUS было реализовано моделирование связанных нестационарных контактных задач для дисковых тормозных узлов и подшипников скольжения в рамках линейной термоупругости с учетом тепловыделения от трения и теплообмена с окружающей средой.

Для дискового тормозного устройства изучены напряженно-деформированное состояние и температурные поля в зависимости времени, а также механических и геометрических параметров. Конечно-элементный анализ для более правильной сходимости был разделен на два этапа. В рамках первого этапа была решена статическая задача о вдавливании с силой  $P$  тормозных накладок в диск. На следующем этапе решалась динамическая нестационарная задача с заданной скоростью вращения тормозного диска. Показано, что характер нагрева может быть в трех режимах: 1) в случае малой скорости вращения, небольшой прижимной силы, а также значительного теплообмена с окружающей средой температура на диске может принимать начальное значение после некоторого момента времени; 2) при высокой скорости вращения, но небольшой прижимной силе температура точки может выйти на некоторый стационарный режим; 3) в случае высокой скорости вращения и значительной прижимной силе температура точки после некоторого момента растет линейно. Показано наличие максимума температуры в глубине тормозного диска.

Рассмотрен ряд нестационарных контактных задач связанной термоупругости о взаимодействии упругого цилиндра (вала) с внутренней поверхностью цилиндрического основания конечной длины (подшипника), содержащего полимерные вставки различной конфигурации. На поверхностях вала и подшипника, которые граничат с окружающей средой, определены условия конвективного теплообмена. Во внутреннюю поверхность подшипника внедряется вал, который вращается с заданной, в общем случае переменной, скоростью. Между валом и подшипником происходит тепловыделение от трения. Проведены численные расчёты температуры вала и подшипника с целью построения зависимостей максимальных значений температуры от времени и определения таких параметров задачи (скорость вращения вала, значения нагрузки, коэффициентов трения, геометрических и материальных параметров), при которых прекращается рост максимальных значений температуры подшипника.

Работа поддержана МОН РФ (проект №213.01-11/2014-28) и грантом РФФИ № 14-08-31663 мол\_а.

## Влияние агрегации эритроцитов на течение крови по цилиндрическим трубкам

**Черевко В. А.**

*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина*  
cherevko.vita@gmail.com

Кровь является неньютоновской жидкостью, вязкость которой зависит от скорости течения, концентрации и агрегационной способности эритроцитов и полимерных молекул в плазме крови, диаметра кровеносного сосуда, режима и предыстории течения, жесткости мембран эритроцитов и вязкости плазмы крови. Моделирование стационарных и периодических течений крови по артериям представляет собой очень сложную задачу в рамках модели неньютоновской жидкости. Именно поэтому при течении крови в крупных артериях, где  $Re \sim 100\text{--}1000$ , кровь моделируется однородной вязкой жидкостью, а в малых артериях кровь моделируется как однородная жидкость с переменной вязкостью. Исследование влияния всей совокупности параметров — состава крови и режима течения — на ее реологические свойства и особенности протекания по сосудам и системам сосудов представляет актуальную задачу для медицинской диагностики.

С увеличением скорости сдвига вязкость крови снижается (псевдопластические среды). В то же время вязкость крови является возрастающей функцией концентрации эритроцитов, которая определяется как индивидуальным показателем гематокрита, так и флуктуациями концентрации при течении крови по параллельно расположенным сосудам. При замедлении кровотока происходит образование микроструктуры, состоящей из цепочек агрегатов, а при ускорении — их разрушение. Поскольку давление  $P(t)$  и скорость  $U(t)$  кровотока являются периодическими функциями, в крови как тиксотропной жидкости наблюдаются временные эффекты. В малых кровеносных сосудах образуется свободный от эритроцитов пристенный слой (эффект Фареуса—Линдквиста), что приводит к уменьшению эффективной вязкости. Поскольку показатель вязкости крови является важным диагностическим показателем и его оценка по результатам измерений *in vivo*, а также влияние на состояние системы микроциркуляции сильно зависит от всей совокупности неньютоновских свойств крови. В данной работе представлена многофазная модель суспензии крови, которая позволяет оценить влияние каждого из перечисленных параметров на вязкость крови и учесть сложные изменения реологии крови при ее пульсирующем движении. Двухфазная модель включает эритроциты и плазму крови, для которых записаны уравнения баланса массы и импульса суспензии, а также уравнение кинетики агрегации. Рассмотрена задача о стационарном течении по жесткой трубке кругового сечения. Путем осреднения уравнений по сечению трубки получены уравнения квазиодномерной модели. Решение задачи получено численно. В ходе компьютерного моделирования исследовано влияние вариаций параметров модели на зависимости давление—расход. Показано, что при некоторых наборах параметров и режимах течения увеличение вязкости за счет агрегации или повышения концентрации частиц может компенсироваться снижением вязкости за счет высокой скорости сдвига или эффекта Фареуса—Линдквиста. Обсуждается набор тестов, позволяющих проводить адекватную оценку динамической вязкости крови для задач медицинской диагностики.

Использование виртуальных компьютерных моделей  
с целью статистического анализа монтажа авиационных агрегатов

**Чотчаева С. К., Сибирский В. В.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
semo\_s@mail.ru

Исключительно высокая сложность технологий производства и относительно небольшой объем выпуска авиационной техники обуславливают то, что авиационное производство, как правило, является мелкосерийным, что свойственно также агрегатной и окончательной сборке. Среди операций окончательной сборки особое место занимают операции монтажа силовых установок, трансмиссий, отличающиеся наличием пространственных многозвенных размерных цепей (РЦ), достижение точности которых, выполняется чаще всего методом регулирования и связано с большими трудностями из-за сложности и больших габаритов собираемых изделий. Небольшая серийность авиационного производства не позволяет использовать основанный на статистическом анализе полей рассеяния составляющих и замыкающих звеньев метод максимума-минимума, как это регламентируется в руководящих справочных документах. Между тем, процесс сборки является конечным этапом производства самолетов и вертолетов, который характеризуется малой степенью автоматизации, исключительно высокой трудоемкостью, во многом определяя эксплуатационные характеристики выпускаемого изделия. Так, в среднем по отрасли время, затраченное на сборочные работы, составляет 50–75% полного цикла серийного изготовления самолетов и вертолетов, а их трудоемкость — 35–40% общей трудоемкости, что объясняется большим числом монтируемых деталей и систем, сложностью и жесткими требованиями к точности исполнительных размеров. Перечисленные обстоятельства сделали актуальной разработку системного подхода к проектированию оптимальных технологий сборки. Современный летательный аппарат, представляющий собой исключительно сложную техническую систему, характеризуется широким спектром сборочных операций, требующих применения различных методов достижения точности исполнительных размеров. В данной работе представлен подход и реализующие его методы обеспечения точности монтажа силовой установки вертолета, размерные связи которой представлены в форме многозвенных связанных трехмерных РЦ, точность замыкающих звеньев которых обеспечивается методом регулирования, а большая часть составляющих звеньев недоступна для измерения на стадии монтажа. На примере технологии монтажа силовой установки вертолета одноосной схемы выполнены анализ размерных связей группы авиационных агрегатов, построение численно-аналитической модели связанной трехмерной РЦ, представлены методы и возможности программных средств решения для такой РЦ прямой и обратной задач; описан метод построения и использования базы данных виртуальных сборок, позволяющий найти в базе данных сборку-аналог, и на основе рекомендации для сборки-аналога выполнить достижение точности реальной сборки методом регулирования, обсуждаются особенности и проблемы реализации использующей этот подход технологии в условиях мелкосерийного производства.

## Моделирование деформации грудной клетки

**Шамик В. Б., Ковалев М. С.**

*Ростовский государственный медицинский университет*

prof.shamik@gmail.com

Деформации грудной клетки (ДГК) представляют собой пороки развития, которые, кроме косметического дефекта в виде западения или выпячивания грудины и ребер, сопровождается различными функциональными нарушениями в кардио-респираторной системе. Воронкообразная деформация грудной клетки (ВДГК) является наиболее распространенным пороком среди всех, связанных с патологией передней грудной стенки и встречается у 0,2 до 2,3% населения. Килевидная деформация грудной клетки (КДГК) встречается примерно у 0,6%. Для диагностики степени деформации грудной клетки предложены различные диагностические показатели (индекс Наллера, объемный индекс деформации, индекс компрессии сердца, индексы эксцентричности (EI), плоскостности (FI) и округлости (CI), индекс ротации (RI) и другие). Однако, сложность диагностики заключается именно при асимметричных деформациях, которые встречаются в преобладающем количестве случаев (48–67% наблюдений). Представленные исследования не могут в достаточной степени характеризовать все многообразие асимметричных деформаций грудной клетки. В конечном итоге как врача, так и пациента интересует оценка формы грудной клетки до и после операции. В связи с этим в работе предложена модель определения объема деформированной части грудной клетки именно при асимметричных ДГК.

Опишем деформацию в прямоугольной декартовой системе координат, которая характеризуется некоторой, в общем случае несимметричной поверхностью, опирающейся на некоторое основание деформированного участка.

Зная координаты точек границ деформированной части грудной клетки, можно построить гладкие кривые, которые с заданной точностью будут аппроксимировать границы. Для этой цели использованы одномерные многочлены Лагранжа. Известно, что увеличением числа узлов можно добиться сколь угодно высокой точности описания гладких деформаций.

Площадь основания деформированной части находится в виде определенного интеграла. Для нахождения объема деформированной части необходимо задать сетку узлов, покрывающих собой область деформации, причем поверхность асимметричной деформации можно описать двумерными интерполяционными многочленами Лагранжа.

Таким образом, предложенный подход к описанию и оцениванию параметров деформации грудной клетки несложно реализовать на ПК, поскольку современные прикладные математические пакеты позволяют достаточно просто реализовать предложенные процедуры и алгоритмы вычисления определенных интегралов. На основании предложенного подхода определены необходимые параметры асимметричных деформаций грудной клетки, на основании которых рассчитаны коэффициенты деформации асимметричной грудной клетки и определен тип патологии — локальный или диффузный.

## О некоторых аспектах моделирования деформации стопы и походки при детском церебральном параличе

**Шамик В. Б., Рябоконеv С. Г.**

*Ростовский государственный медицинский университет*

prof.shamik@gmail.com

Ходьба является высокоавтоматизированным системным процессом, в ходе которого происходит многопараметрическое взаимодействие большого числа элементов опорно-двигательной системы (ОДС) и нервных центров. Несмотря на сложность процесса, двигательное управление ходьбой человека в норме происходит по четким стандартам, и стереотип походки отличается высокой отрегулированностью параметров.

При патологии этот стереотип нарушается и весьма быстро возникает новый, патологический тип походки, изучая особенности которого можно диагностировать и этиологию, и патогенез заболевания. Определение биомеханических функциональных инвариантных параметров имеет большой утилитарный смысл, давая практикам короткий путь к главным информативным параметрам оценки походки: ихнография, электроподография, электрогониография натуральная и дифференцированная, акселерография, динамография.

Анализ походки является объективным инструментом для клинической оценки двигательной деятельности у детей с церебральным параличом (ДЦП). На сегодняшний день используется большое количество оценочных шкал. К ним относятся: шкала Ashworth, Gait Deviation Index (индекс отклонения походки GDI), Gillette Functional Assessment Questionnaire (FAQ), Walking Gross Motor Function Classification System (GMFCS), дополненная Integral Method (IM). Развитие биоинженерии системы движения определило два основных клинических ограничения: потребность в инструментарии, которое изменило бы естественную походку пациента, и потребность в методах обработки данных, которые разрешат анализ и корреляцию большого объема электромиографической и кинематической информации. Конечным результатом процесса - единица, которая включает многоканальную систему телеметрии, электромиографию (ЭМГ), информацию об изменении стоп, и телевизионную компьютерную систему, чтобы обращаться с кинематической информацией. Исследования походки детей с ДЦП привели к количественному изменению ЭМГ и кинематической информации о патогенезе способности передвигаться при этом нарушении.

Множество различных оценочных систем походки при ДЦП свидетельствует о сложности измерения этого параметра и его многогранности. Изменить ситуацию и определить пути ее улучшения помогло бы использование математической модели деформации стопы и ходьбы при ДЦП. Однако, примеров математического моделирования ДЦП в литературе крайне мало. Это связано, на наш взгляд, со сложностью создания модели, которая должна учитывать не только ортопедическую деформацию стопы, но и состояние центральной нервной системы и ее воздействие на проявление движения деформированного сегмента.

Наиболее простой моделью, позволяющей оценивать изменение деформации стопы в результате хирургического вмешательства, является модель твердого тела с упругими связями.

Оптимизация гидроакустических устройств нового поколения  
на основе пористой пьезокерамики  
или перфорированных наноразмерных пленок

Шевцова М. С.<sup>1</sup>, Орозалиев Э. Э.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина  
mariamarcs@bk.ru

Моделирование мощных излучателей и высокочувствительных гидрофонов на основе MEMS-технологий представляет большой интерес для исследователей в области подводной акустики. Основное преимущество таких устройств перед их макроскопическими аналогами заключается в том, что они демонстрируют лучшие рабочие характеристики и требуют значительно меньших производственных затрат. Использование пористых и перфорированных пьезоэлементов в гидроакустических преобразователях обосновано возможностью согласования импедансов и малостью размеров по сравнению с длиной звуковой волны, что позволяет создавать системы как с острыми (за счет массивов), так и с равномерными диаграммами направленности.

В первой части работы представлены модели двух MEMS-устройств: многослойного излучателя с активным пористым пьезоэлементом и гидрофона на основе наноразмерной перфорированной пьезомембраны. Сформулированы и решены связанные задачи акустики и электроупругости в осесимметричных постановках, где использованы рассчитанные ранее зависимости эффективных модулей активных слоев от параметра пористости или степени перфорации.

На втором этапе исследования сформулированы и решены задачи оптимизации обоих типов устройств. Постановка оптимизационных задач предусматривала введение независимых целевых функционалов: уровня звукового давления (SPL), коэффициента акустического преобразования по току (TCR) и среднеквадратичного отклонения SPL в заданном частотном диапазоне — для излучателя; коэффициента преобразования по напряжению (TVR), чувствительности и неравномерности ее частотной характеристики — для гидрофона. В качестве переменных дизайна излучателя были введены акустические импедансы слоев и параметр пористости; для гидрофона — частота первой моды изгибных колебаний полимерной мембраны, фактор Рэлеевского демпфирования ее материала и степень перфорации.

Решение задач реализовано с помощью подхода реконструкции области Парето, позволяющего произвести выбор оптимального решения с учетом всех ограничений, оценить чувствительность целевых функционалов к каждой переменной дизайна и размеры области оптимума. Связанные задачи гармонического анализа процессов электроупругости, акустики и многокритериальной оптимизации решены в программной среде совместно работающих MATLAB и КЭ пакета Comsol Multiphysics.

Полученные результаты и предложенные методы могут быть использованы для оптимизации широкого диапазона акустических преобразователей.

## Влияние неоднородности миокарда на процесс возникновения аритмий

**Шестаков А. П., Шардаков И. Н., Вассерман И. Н.***Пермь, Институт механики сплошных сред УрО РАН*

shap@icmm.ru

Работа посвящена моделированию электродинамических процессов, протекающих в сердце человека. Эти процессы представляют собой волны потенциала действия, которые формируются за счет ионных токов протекающих через клеточную мембрану. Исследование механизмов их генерации и распространения является важной задачей, поскольку именно электрическое возбуждение вызывает сокращение сердечной мышцы и как следствие определяет насосную функцию сердца. Нарушения процесса распространения волн приводит к аритмиям, при которых сердце сокращается не регулярно, поэтому его эффективность как насоса снижается. При определенных условиях аритмия переходит в фибрилляцию, в этом случае сердце сокращается хаотически и перекачивание крови практически не происходит.

Существуют различные механизмы, описывающие процесс зарождения и развития аритмий. В настоящей работе на основе феноменологической модели Алиева—Панфилова рассматривается влияние пространственной неоднородности миокарда на процесс возникновения аритмий. В норме сердечная мышца является неоднородной средой. Эта неоднородность может сильно усиливаться при заболеваниях сердца, таких как инфаркт. Одним из параметров неоднородности является проводимость сердечной мышцы, которая может изменяться, от нормального значения до нуля, что характерно для инфарктного рубца. Аритмия может быть вызвана циркуляцией волн вокруг непроводящей ткани. Для того чтобы запустить этот процесс, необходим участок ткани с однонаправленной проводимостью. Такая проводимость возможна в узком канале между двумя рубцами, при этом необходимо чтобы этот канал плавно расширялся в одну сторону. На основе этого механизма, дополненного областями с низкой проводимостью, построена неоднородность размером 15 мм, приводящая к самовозбуждению. При таком размере она может реализоваться на сердце человека при сближении двух рубцов. Кроме этого рассмотрены полупроводниковые свойства в средах с различной длительностью потенциала действия и на их основе сконструирована неоднородность, приводящая к образованию спиральной волны.

Решение задачи распространения электрической волны по сердечной мышце выполняется численно. Алгоритм решения основан на методе расщепления. В результате применения этого метода нелинейная краевая задача в частных производных сводится к последовательности более простых: обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных краевых задач в частных производных. В силу невысокой жесткости обыкновенных дифференциальных уравнений полученных в результате метода расщепления, их решение выполняется явным методом Рунге—Кутты.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-01-96032-р\_урал\_a)

## Использование бессеточного метода для компьютерного моделирования перелома

**Шиповская М. И.**

*Симферополь, Медакадемия им. С. И. Георгиевского КФУ им. В. И. Вернадского  
ivev@i.ua*

Исследуется возникновение разрушений и образование макротрещин в хрупком материале, свойства которого приближены к свойствам костной ткани. Как показывают исследования, после образования большого числа малых трещин на мезоуровне происходит их консолидация с преимущественным развитием лишь некоторых наиболее опасных магистральных макротрещин. В связи с этим возникают задачи определения параметров предельного состояния костной ткани в зависимости от сложившегося напряженно-деформированного состояния (НДС). В рамках упругопластической модели сплошной среды компьютерным методом сглаженных частиц (SPH) рассчитывается НДС одноосно нагружаемых образцов. Многие задачи прикладного характера, такие как использование интрамедуллярного блокируемого остеосинтеза, показали необходимость исследования допустимых значений компрессии при использовании металлоконструкций, т. е. расчета на прочность системы «металл—кость» и не могут быть рассмотрены без реалистичного представления о реакции на нагружение, которая и определяет их механическое поведение. Проведение натуральных экспериментов, требующих применения тех или иных датчиков нагрузки или деформации, в случае металлоостеосинтеза выполнить в клинических условиях практически невозможно. Сложность конструкции системы «фиксатор—кость», требующая рассмотрения поставленной задачи в трехмерной постановке, и значительное различие физико-механических свойств ее элементов делают проведение модельных экспериментов чрезвычайно сложным и дорогостоящим, а адекватность результатов, полученных на моделях, реальным значениям в природе — весьма сомнительной. Трехмерный расчет при этом позволяет отслеживать существенно пространственные особенности разрушения. В ряду этих вопросов важнейшее место занимает задача зарождения локального разрушения и образования магистральных трещин. Трещинообразование определяется из анализа НДС материала. Способность метода SPH отслеживать историю состояния частиц материала обеспечивает реалистичную структуру, допускающую предсказание возникновения разрушения и распространения трещин. При критическом по Грэди-Киппу НДС SPH подход численно определяет разрушение материала посредством потери взаимодействия между соседними частицами.

Сопоставление результатов моделирования с экспериментальными данными показывает, что использование предложенного трехмерного расчетного подхода позволяет не только достаточно точно рассчитывать задачи рассматриваемого класса, но и способствует более качественному изучению и лучшему пониманию происходящих физических процессов.

Моделирование взаимодействия полосового пьезоактуатора  
с упругим слоем с помощью интегрального подхода  
и метода конечных элементов высокого порядка точности

**Шпак А. Н.<sup>1</sup>, Голуб М. В.<sup>1</sup>, Buethe I.<sup>2</sup>, Fritzen C.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Краснодар, Институт математики, механики и информатики,  
Кубанский государственный университет*

<sup>2</sup>*Siegen, University of Siegen*

alisashpak7@gmail.com

Пьезоэлектрические актуаторы и сенсоры широко используются для возбуждения и последующего измерения нестационарных сигналов в протяженных структурах в рамках мониторинга структур и конструкций. Такие системы предполагают разработку алгоритмов выявления дефектов на основе полученных сигналов. Поэтому изучение динамического поведения актуаторов, а также зависимости генерируемых актуатором в упругом слое волн от области контакта представляется актуальной задачей, которая, несомненно, требует математического и компьютерного моделирования. Задача моделирования пьезоэлектрической накладки, приклеенной к упругому слою, решалась различными методами, в том числе с помощью полуаналитического интегрального подхода. Замена действия актуатора сосредоточенными силами позволяет описывать поведение пьезоактуатора при идеальном контакте с упругим слоем даже на достаточно высоких частотах, однако она не может быть эффективно использована в случае отслоения между актуатором и слоем. В то же время, интегральный подход позволяет качественно моделировать динамическое поведение актуатора на высоких частотах, если известны контактные напряжения в области контакта актуатора со слоем. Цель настоящей работы заключается в создании математической модели, описывающей динамическое поведение системы актуатор-слой на различных частотах с учетом возможности отслоения пьезоактивного элемента. Для этого была разработана связная модель, в которой пьезоактуатор описывается с помощью метода конечных элементов высокого порядка точности, а упругий слой — с помощью полуаналитического интегрального подхода. Волновые поля (перемещения, а также касательные и нормальные напряжения) предполагаются непрерывными в области контакта между актуатором и слоем, которая в общем случае может быть набором несвязных отрезков. Результаты моделирования сравниваются с расчётами в коммерческой среде Comsol Multiphysics. На основе этих моделей рассчитываются скорости перемещений поверхности пластины, возбуждаемых пьезоактуатором при подаче на него электрического сигнала определённого вида. Кроме того, изучаются распределения перемещений и напряжений в самом актуаторе при его отклейке, в том числе и на границе со слоем, производится сравнение с экспериментом. Данная модель позволяет рассчитывать резонансные частоты как актуатора, так и системы актуатор-слой, что может быть полезно при идентификации повреждённых актуаторов путём «прозванивания» актуатора на различных частотах и обнаружения характера повреждения по изменению резонансных частот системы актуатор-слой.

## Неклассические варианты квазирезонансов на краевых стоячих волнах у торца анизотропного полуслоя

**Шпак В. А.**

*Донецкий НИИ черной металлургии*

vashpak@mail.ru

Исследование резонансных явлений при динамическом деформировании твердых тел и элементов конструкций имеет важное теоретическое и прикладное значение для многих современных направлений развития науки и техники. Учет анизотропии упругих свойств реальных природных и искусственных материалов позволяет не только давать более точные количественные оценки известным процессам и явлениям, но и обнаруживать качественно новые механические свойства твердых анизотропных тел. Рассмотрена задача об отражении нормальных волн в упругом полубесконечном слое из поперечно-анизотропного материала со свободными внешними гранями и торцевой плоскостью.

Для решения рассматриваемой задачи был выбран метод однородных решений, который позволяет волновое поле в полубесконечном слое представить в виде ряда по системе нормальных волн с действительными, чисто мнимыми и комплексными постоянными распространения. Выполнение граничных условий на торце и алгебраизация полученных функциональных уравнений осуществлялась тремя способами: методом коллокаций, поточечным методом наименьших квадратов и методом обобщенной ортогональности. В результате был проведен сравнительный анализ этих трех способов и установлено оптимальное количество удерживаемых членов ряда нормальных мод.

Основой для поиска новых механических эффектов стало детальное исследование дисперсионных уравнений для большого количества реальных кристаллических материалов орторомбической системы и проведенная их классификация по топологии ветвей чисто мнимых мод нормальных волн в широком диапазоне изменения параметров частоты и волнового числа. В процессе проведенных исследований были установлены особенности проявления краевого резонанса в трансверсально-изотропном волноводе при отражении от торца полуслоя первой симметричной волны, построены диаграммы изменения амплитудных, кинематических и энергетических характеристик в рассматриваемом волновом поле и определена ширина частотного диапазона проявления краевого резонанса в зависимости от механических параметров материала полуслоя.

По специфике поведения чисто мнимых ветвей частотного спектра были выделены материалы, для которых возможно ожидать проявления резонансных явлений, отличных от хорошо известного и, можно считать, классического краевого резонанса. К таким материалам относятся кристаллы со счетным количеством чисто мнимых мод при нулевой частоте и имеющих зигзагообразные участки мнимых ветвей с небольшим порядковым номером в области до первой критической частоты. Построенные диаграммы изменения амплитудных характеристик позволяют сделать вывод об обнаружении новых неклассических квазирезонансных явлений в полуограниченных анизотропных волноводах. Рассчитаны и проанализированы формы колебаний и энергетические характеристики в диапазоне частот, охватывающем зигзагообразные участки поведения чисто мнимых ветвей.

## Уточненное конечно-элементное моделирование трубчатого пьезоэлектрического вибрационного гироскопа

**Шпрайзер Е. И.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
shprayzer@gmail.com

В современных системах навигации в качестве приборов для регистрации скорости вращения контролируемых объектов широко используются пьезоэлектрические вибрационные гироскопы, обладающие малыми габаритами, низким энергопотреблением и устойчивостью к механическим воздействиям.

В продолжение предыдущих исследований в настоящем докладе проведен анализ пьезоэлектрического трубчатого вибрационного гироскопа, выполненного из радиально поляризованного пьезокерамического материала в рабочей области. Изучаемый вибрационный гироскоп выполнен в форме полого цилиндра, на внешней боковой поверхности которого параллельно его оси расположены две пары электродов, разделенных неэлектропроводными поверхностями. На внутренней поверхности цилиндра нанесен один сплошной электрод, полностью покрывающий всю поверхность. Две пары электродов располагаются в перпендикулярных направлениях, причем одна пара используется для возбуждения исходных изгибных колебаний, а вторая пара предназначена для регистрации колебаний, наведенных за счет появляющихся при вращении гироскопа сил Кориолиса. Такой гироскоп исследовался ранее в работах J. S. Yang, H. Y. Fang, A. A. Левицкого и П. С. Маринушкина. В данной работе конечно-элементное моделирование трубчатого гироскопа осуществляется с учетом специальных граничных условий на торцевых поверхностях, допускающих изгибные колебания тела в перпендикулярных направлениях, а также в предположениях как однородной поляризации по радиусу, как и неоднородной. В последнем случае имеющиеся электроды являются и электродами поляризации, а, следовательно, их геометрия приводит к неоднородной радиальной поляризации, вызванной наличием неэлектропроводных границ.

Для компьютерного моделирования гироскопа использовался конечно-элементный комплекс ANSYS. Были разработаны программы на командном языке APDL ANSYS, позволяющие строить твердотельные и конечно-элементные модели с дополнительными конструктивными элементами для обеспечения заданных условий закрепления по торцам. Объемные сетки внутри трубчатого гироскопа генерировались в виде канонических гексаэдральных сеток с пьезоэлектрическими конечными элементами. При моделировании неоднородной поляризации вначале решалась задача электростатики, а после определения векторов поляризации для каждого конечного элемента создавались свои элементные системы координат с осями поляризации пьезокерамики, параллельными направлениям найденных векторов поляризации.

Разработанные программы позволили определить собственные частоты и формы колебаний, построить амплитудно-частотные характеристики и вычислить выходные значения наведенных потенциалов на регистрирующих электродах при вращении гироскопа. Проведенные расчеты показали эффективность уточненного моделирования трубчатого вибрационного гироскопа.

## Биомеханическая оценка стабильности фиксации фрагментарного перелома большеберцовой кости на различных этапах реабилитации пациента

**Шукейло Е. Ю.**

*Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет*  
eyshukeylo@gmail.com

Среди всех переломов длинных трубчатых костей частота переломов большеберцовой кости составляет от 65,3 до 77,8%. Создание стабильной фиксации костных отломков способствует ускорению сращения, предупреждению возникновения резорбции, сокращению сроков образования костного регенерата и уменьшению продолжительности репаративной регенерации.

Целью данного исследования является повышение эффективности восстановительного лечения пациентов после остеосинтеза фрагментарного перелома большеберцовой кости интрамедуллярным блокируемым штифтом. Это достигается путем компьютерного моделирования биотехнической системы и её биомеханического исследования на четырех этапах реабилитации больного.

В программном комплексе SolidWorks построены объемные компьютерные модели перелома большеберцовой кости с 50-миллиметровым фрагментом в средней трети, штифта и четырех винтов; создана биотехническая система и проведено исследование её напряженно-деформированного состояния.

Высота диастаза между отломками кости равна 500 мкм. Диаметр штифта составляет 8 мм. Диаметр винтов в проксимальном отделе кости равен 4,5 мм, в дистальном отделе — 3,5 мм.

Материал кортикальной и спонгиозной ткани принимается ортотропным, упругим, деформируемым, однородным и сплошным. Материал штифта и винтов — сплав титана — принимается изотропным, упругим, деформируемым, однородным и сплошным. Сила 140, 300, 700 или 1400 Н, в зависимости от этапа реабилитации пациента, прикладывается к поверхности проксимального конца большеберцовой кости и вдоль её анатомической оси. Дистальный конец кости жестко закрепляется по выделенной поверхности.

Для оценки стабильности фиксации фрагментарного перелома большеберцовой кости используется критерий, согласно которому напряжения в звеньях биотехнической системы не должны превышать максимально допускаемых значений и относительное изменение размера диастаза должно быть меньше 500 мкм.

В среде SolidWorks Simulation с помощью метода конечных элементов проведены расчеты напряжений и перемещений, возникающих в звеньях биотехнической системы, при четырёх комбинациях значений физико-механических свойств материалов и силы, действующей на кость. Полученные результаты удовлетворяют поставленному в работе критерию — стабильность фиксации обеспечивается.

## Об особенностях волновых процессов в полом цилиндре в поле неоднородных предварительных напряжений

**Юров В. О.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*vitja.jurov@yandex.ru*

Исследованы волны в полом упругом неоднородном цилиндре со свободными границами при наличии поля предварительных напряжений (ПН). Отметим, что волновые процессы в цилиндрах при отсутствии полей ПН и наличии постоянных полей ПН достаточно подробно исследованы, однако это исследование не дает возможности оценить справедливость выводов даже для задачи Ламе. Для описания волновых процессов в цилиндре будем использовать модель, представленную Е. Треффтцем и развитую позже А. Н. Гузем. Тензор предварительных напряжений имеет компоненты, зависящие от радиальной координаты. Задача сведена к матричному дифференциальному уравнению первого порядка, матрица которого образует квадратичный пучок с переменными коэффициентами. Матрицы, входящие в этот пучок, зависят от компонент тензора ПН. Система состоит из шести уравнений, правые части которых зависят от двух безразмерных спектральных параметров — частоты и волнового числа.

Для этой системы представлены поля ПН, соответствующие нагружению с внутренней поверхности давлением, продольному растяжению и дисторсии. Анализ стоячих волн и соответствующих резонансов позволил установить, что для любых законов изменения ПН существует два семейства дисперсионных кривых, отличающихся кинематикой движения. На основе метода возмущений получены формулы, отражающие изменение дисперсионной картины в окрестности резонансов первого и второго типа. Выполнен асимптотический анализ для длинных волн и получен ряд формул, описывающих первую дисперсионную ветвь. Для поля ПН, порожденного следящей нагрузкой, для краевой задачи сформулированы 2 вида граничных условий, отличающихся наличием или отсутствием некоторого слагаемого, пропорционального внутреннему давлению. Выполнен анализ зависимости точек дисперсионного множества от варианта граничных условий. В силу переменности коэффициентов системы решения рассматриваемых задач находились численно методом пристрелки путем сведения к решению набора задач Коши, предложенная схема позволяет анализировать любые законы изменения компонент тензора ПН.

Аналитически и путем проведения численных расчетов исследованы дисперсионные множества задачи для различных типов ПН (раздувание, растяжение, скручивание). Указаны ситуации, когда размерность матричного пучка понижается до 4 (раздувание, растяжение, совместное действие). Найдены участки аномальной дисперсии. Проведено исследование, позволившее установить степень влияния ПН на структуру компонент дисперсионного множества и изменение скоростей распространяющихся мод, что позволяет в дальнейшем проводить анализ обратной задачи о реконструкции типа и уровня ПН.

Автор выражает благодарность научному руководителю Ватульяну А. О. за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 13-01-00196).

## A reliable NDT characterisation of mechanical properties of composite materials

**Akishin P. Y.<sup>1</sup>, Barkanov E. N.<sup>1</sup>, Wesolowski M.<sup>2</sup>, Kolosova E. M.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Riga Technical University*

<sup>2</sup>*Koszalin University of Technology*

<sup>3</sup>*Rostov-on-Don, Southern Federal University*

pavels.akisins@rtu.lv

Modern composite materials have promising perspectives for an application in many industrial sectors such as aerospace, automotive and electronics industries. Their technical data could be estimated by using conventional fracture methods or nondestructive technique. In the case of high costs of advanced composites, their experimental testing with conventional fracture methods looks as less effective due to the destructive nature of such experiments. On these reasons different nondestructive techniques have been adapted or developed for a characterisation of advanced composite material properties. There are static approach using three-point-bending test and two dynamic methods, namely, impulse excitation method and inverse technique based on vibration tests.

Tree-point-bending test and impulse excitation method use beam-like specimens for a characterisation of the elastic material properties. Tree-point-bending test allows the determination of Young's modulus of the material in the longitudinal direction of specimen which is calculated in terms of the measured centre deflection, applied load and geometry of a beam with a rectangular cross section. The advantage of method is its nondestructive nature under static load. To keep this approach nondestructive, only the elastic behavior of composite beams is allowed.

Vibration test based on the impulse excitation is adapted for a determination of the elastic properties of small beam samples. This method originally developed for the testing of heavy concrete specimens can be applied for a lightweight structure providing the non-contact vibration excitation and sensing, so that no additional mass will corrupt the resonance frequencies. Beam like specimens used in this method have specific resonances that are determined by the frequency equation. In order to compute the elastic properties, it is necessary to establish dimensions, density and experimental fundamental frequencies in bending and twisting of the beam with free-free boundary conditions. The proposed method appears to be effective approach for the characterisation of mechanical properties of composite materials. Only two beams cutted along principal directions of panels and one vibration test for each beam are required to determine two longitudinal Young's moduli and in-plane shear modulus.

The basic idea of the inverse technique based on vibration tests of plate-like specimens is that simple mathematical models (response surfaces) are determined only by the finite element solutions in the reference points of the plan of experiments. The identification parameters are obtained minimising the error functional, which describes a difference between the measured and numerically calculated parameters of structural responses. It is necessary to note that the developed inverse technique does not require special shape of samples and their time consuming preparation process.

The present techniques have been successfully applied for a characterisation of the orthotropic elastic material properties of laminated composites.

## An effective NDT characterisation of dissipative composite material properties

**Barkanov E. N.<sup>1</sup>, Chebakov M. I.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Riga Technical University*

<sup>2</sup>*Rostov-on-Don, Southern Federal University*

barkanov@latnet.lv

Dissipative material properties play very important role in the dynamic behaviour of any construction. Unfortunately the technical data of composite materials provided by manufacturers do not contain all necessary information to predict the behaviour of advanced composite structures using different analysis tools.

In most cases to characterise the dissipative properties of composite materials DMA (dynamic mechanical analysis) analysers are used. In DMA the sample is subjected to a periodic stress in one of several different modes of deformation. The force and displacement amplitudes and phase shift are analysed as a function of temperature, time and frequency. The material modulus is calculated from the applied force amplitude, the measured displacement amplitude and the phase shift between the force and displacement signals. It is necessary to note that in most cases DMA technique allows to estimate with a high accuracy the storage and loss moduli over a wide range of temperatures ( $-190 \dots 600^\circ \text{C}$ ) but in the narrow frequency range (till 100 Hz).

To overcome these limitations, an inverse technique based on simple vibration tests has been developed to characterise the hysteretic and viscoelastic material properties. In the case of viscoelastic materials, this novel approach allows to preserve the frequency and temperature dependencies of the storage and loss moduli in a wide range of frequencies and temperatures. The computational effort has been substantially reduced by using an optimisation based on the planning of the experiments and the response surface technique in order to minimize the error functional.

The developed inverse technique uses vibration tests and consists of the experimental set-up, the numerical model and the material parameters identification procedure. The first step involves the planning of the investigation depending on the number of measured parameters and experiments. Next, a finite element analysis is applied at the reference points of the experimental design and the different dynamic parameters of the structure are calculated. In the third step of this technique, these numerical data are used to determine simple functions using a response surface method. Simultaneously, vibration experiments are carried out to measure the natural resonance frequencies and corresponding loss factors of the tested samples. The identification of the material properties is performed in the final step of the method by minimising the error functional, which describes the difference between the experimental and numerical parameters of the structural responses.

The present inverse technique has been successfully applied to characterise the dissipative properties of metallic, nanocomposite, adhesive and laminated composite materials in wide frequency and temperature ranges. Good agreement between experimental and numerical results was obtained.

## Содержание

Бауэр С. М. Модели деформируемого тела в задачах биомеханики глаза	4
Цатурян А. К. Континуально-кинетическая модель сердечной мышцы	5
Агаян К. Л., Атоян Л. А. Двумерные спиновые (магнитные) волны в составном ферромагнитном полупространстве	6
Айзикович С. М., Волков С. С., Васильев А. С., Литвиненко А. Н. Качественные особенности контактного взаимодействия штампов с жесткими и мягкими покрытиями	7
Акопян В. Н. Напряженное состояние кусочно-однородного клина с межфазовым абсолютно жестким включением	8
Александров А. А., Фоменко С. И. Запрещенные зоны и зоны низкого прохождения в слоистых фононных кристаллах	9
Балабанов В. А., Кизилова Н. Н. Заполняющие объем бинарные деревья как оптимальные транспортные русла	10
Бирюков С. В., Соловьева А. А. Разработка программного модуля САЕ пакета ACELAN на основе SPH метода	11
Богачев И. В., Ватульян А. О. Задачи о деформировании пластин переменной жесткости и их приложения	12
Богачева М. О. Идентификация QRS-комплекса кардиосигнала методом эмпирической модовой декомпозиции	13
Боев Н. В. Теория и эксперимент в дифракции коротких волн на изолированных дефектах и их скоплениях в сплошных средах	14
Бочарова О. В., Анджинович И. Е., Седов А. В. Об одном подходе к повышению информативности поверхностного волнового поля	15
Брагилевский В. Н. Об одном подходе к обучению программированию студентов-механиков	16
Бычков А. А. Моделирование взаимодействия зонда атомно-силового микроскопа с поверхностью тонкой полупроводниковой пленки	17
Васильев Л. В. Колебания неоднородной балки с упругой опорой	18
Васина А. К., Мыцыков Р. Ю. Статический конечно-элементный анализ прочностных характеристик модельной биомеханической системы интрамедуллярного остеосинтеза	19
Ватульян А. О., Гусаков Д. В. Исследование динамического поведения неоднородных пористоупругих структур	20
Ватульян К. А., Макаров С. С. Колебания ортотропной оболочки вращения со сложной формой меридиана	21
Вильде М. В., Ардазишвили Р. В. Кромочные волны высшего порядка в полубесконечном полом цилиндре со свободным торцом	22
Волокитин Г. И. Клиновая дисклинация цилиндра из материала Мурнагана	23
Воробцов И. В., Аменицкий А. В., Белов А. А. Гранично-элементное моделирование поверхностных волн	24
Воронкова Е. Б., Бауэр С. М. Об аппланационных методах измерения внутриглазного давления	25
Геворкян Г. З. Изгибные колебания ортотропной пластины-полосы или балки переменной толщины при упругозащемленных опорах	26

Герасименко Т. Е. Об одной двумерной модели поляризации поликристаллических сегнетоэлектрических материалов . . . . .	27
Гетман В. А., Батищев В. А. Длинноволновая асимптотика пульсовых волн в аорте . . . . .	28
Глухов И. А. Симметричные трехпарциальные локализованные волны в ортотропном слое между ортотропными полупространствами . . .	29
Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Еремин А. А. Локализация повреждений в тонкостенных элементах конструкций методом обращения времени	30
Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Мякишева О. А. Взаимодействие звуковых и ультразвуковых волн с многослойными упругими пластинами	31
Глушкова В. Н. Верификация робототехнических иерархических систем реального времени . . . . .	32
Говорухин В. Н. Анализ течений невязкой несжимаемой жидкости бессеточными методами . . . . .	33
Голядкина А. А., Полиенко А. В., Хайдарова Л. Р., Номеровская Е. А. Пациенто-ориентированное моделирование желудочков сердца: биомеханический подход . . . . .	34
Гришина О. А. Получение граничных условий для решения задач атерогенеза в коронарных артериях человека . . . . .	35
Груздев Р. Ю., Репнякова С. Ю. Моделирование пьезоактивных материалов методами молекулярной динамики . . . . .	36
Гукасян Л. С., Недин Р. Д. Проекционный метод в решении плоских обратных задач . . . . .	37
Доль А. В., Иванов Д. В., Смирнов Д. А. Методика оптимизации процесса стоматологического протезирования . . . . .	38
Дорошенко О. В., Голуб М. В. Оценка тангенциальных компонент матрицы жесткости для описания динамического поведения поврежденных разномодульных интерфейсов . . . . .	39
Дударев В. В., Мнухин Р. М. К определению области деструкции в трубе	40
Дышко Б. А. Добротность как характеристика эффективности в спортивной биомеханике . . . . .	41
Жданов И. А. Исследование стационарных течений невязкой несжимаемой жидкости через прямоугольный канал . . . . .	42
Жиляев И. В., Надолин К. А. Численное моделирование турбулентного течения в мелком протяженном открытом безнапорном русловом потоке . . . . .	43
Загребнева А. Д. Математическое моделирование распространения паразитарного заболевания — дирофляриоза . . . . .	44
Зеленина А. А., Зубов Л. М. Влияние краевых дислокаций на нелинейный изгиб прямоугольного бруса из микрополярного материала . . . . .	45
Зеленцов В. Б., Митрин Б. И., Айзикович С. М. Динамическая и квазистатическая неустойчивость решения задач о скользящем трении в контакте . . . . .	46
Земсков А. В., Бугаев Н. М., Тарлаковский Д. В. Об особенностях функций влияния в двумерных задачах упругой диффузии для слоя . . .	47

Зиборов Е. Н., Гультияев В. В. Моделирование межфазного слоя армированных композитов с помощью градиентной теории упругости . . . . .	48
Зимин Б. А., Судьенков Ю. В., Свентицкая В. Е. Энергия диссипации и процесс генерации тепла в вершине движущейся трещины . . . . .	49
Иванов Д. В., Барабаш А. П., Барабаш Ю. А. Биомеханический анализ расширяющегося стержня Fixion . . . . .	50
Ильичев В. Г. «Парадоксальные» компьютерные эксперименты с моделями сложных биосистем . . . . .	51
Ипатов А. А., Игумнов Л. А., Литвинчук С. Ю., Фокина Т. А. Численное исследование действия ударной силы на торец призматического тела	52
Казарников А. В., Ревина С. В. Исследование автоколебаний и стационарных решений в системе Рэлея с диффузией . . . . .	53
Каргин М. А. Конечно-элементный анализ модельной системы чрескостного остеосинтеза, основанной на аппарате Илизарова, при внешних воздействиях, имитирующих движение человека при ходьбе . . . . .	54
Кизилова Н. Н. Течение крови в артериях и венах: квазирегулярная и хаотическая динамика . . . . .	55
Кириллова Е. В., Сыромятников П. В., Диденко А. В. Методы оптимизации расчетов термоупругих и электроупругих композиционных материалов . . . . .	56
Кириллова И. М. Перспективы использования нанотехнологий для повышения адаптационных способностей декоративных растений . . . . .	57
Кириченко О. В. Длинноволновая асимптотика задачи устойчивости двумерных течений с нулевым средним . . . . .	58
Козлов А. А., Гаврюшин С. С., Хрыков С. С., Поляков А. П. Использование аддитивных технологий для поддержки высокотехнологичных медицинских операций . . . . .	59
Колесников А. М. Раздувание многослойного полого шара . . . . .	60
Костандов Ю. А., Шиповский И. Е., Рамский Р. С. Анализ кинематики движения плечевого сустава для оценки возможности использования интрамедуллярной дистракции плеча имплантируемыми аппаратами . . . . .	61
Костандов Ю. А., Шиповский И. Е., Рамский Р. С. Расчет напряженно-деформированного состояния системы металлоостеосинтеза . . . . .	62
Кругликов М. Г., Цибулин В. Г. Косимметричная модель распространения популяций на пространственно-неоднородном ареале и сосуществование видов . . . . .	63
Курбатов С. В., Клецкий М. Е., Буров О. Н., Лисовин А. В., Федик Н. С. Квантово-химическое исследование механизмов образования оксида азота из производных фуроксана в живых системах . . . . .	64
Курбатова Н. В., Надолин Д. К. Техника построения локальных матриц магнито-термо-электроупругих материалов в ACELAN . . . . .	65
Лобова Т. В., Ткачев А. Н. Нечеткие модели прогнозирования загрязненности поверхностных вод . . . . .	66
Лысенко С. А. Визуализация области неустойчивости Тьюринга для системы Шнакенберга . . . . .	67

Ляпин А. А., Святко Ю. А. Восстановление переменного модуля пороупругой балки генетическим алгоритмом . . . . .	68
Макаров С. С., Устинов Ю. А. Собственные колебания гофрированных оболочек . . . . .	69
Манжиров А. В., Стадник Н. Э. Проблемы моделирования поверхностного роста биологических тканей . . . . .	70
Марков И. П., Петров А. Н., Игумнов Л. А., Брагов А. М. Экспериментально-численное исследование задачи динамического изгиба композитной балки . . . . .	71
Марценюк М. А., Сыпачев С. С. Калибровочная модель локомоций: теория и эксперимент . . . . .	72
Моисеенко И. А. Дисперсия продольных волн в трансверсально-изотропных цилиндрах из экспоненциально-неоднородных материалов . . . . .	73
Моргунова А. В. Исследование дисперсионных соотношений для неоднородного трансверсально-изотропного цилиндра . . . . .	74
Мурашкин Е. В., Аноп М. Ф. Расчет оптимального нагружения по заданному полю перемещений в средах со сложной реологией . . . . .	75
Надолин К. А., Карякин М. И., Наседкин А. В. Магистерская программа мехмата ЮФУ «IT in Biomechanics» . . . . .	76
Напрасников В. В., Красновская С. В. Применение эволюционного метода для решения задачи многокритериальной оптимизации опорной рамы конструкции компрессорно-конденсаторного агрегата . . . . .	77
Наседкин А. В. Моделирование пористых активных материалов с учетом поверхностных эффектов . . . . .	78
Наседкина А. А. Моделирование смесевых пороупругих композитов методами эффективных модулей и конечных элементов с учетом внутренней структуры . . . . .	79
Наседкина А. А., Бочев М. А. Использование онлайн-обучения по курсу Scientific Computing в магистерской программе IT in Biomechanics . . . . .	80
Негреева М. Б., Колокольцев М. М. Информационная модель оценки степени риска развития сопутствующих заболеваний у пациентов с дегенеративными заболеваниями позвоночника . . . . .	81
Нестеров С. А. Обратные задачи для функционально-градиентных термоупругих предварительно напряженных тел . . . . .	82
Никитин Ю. Г., Лапина О. Н., Васильченко А. А. Методы оптимизации расчета волновых, электрических и тепловых полей в гибридных композиционных материалах . . . . .	83
Обрезков Л. П. Об устойчивости нелинейно-упругого полого цилиндра при раздувании и растяжении . . . . .	84
Оганесян П. А., Надолин Д. К., Курбатова Н. В., Цыганков В. В., Огурцов А. Ю., Криворотова Д. В. Разработка новых модулей комплекса ACELAN для решения задач с пористыми электроупругими и магнитоупругими материалами . . . . .	85
Пачева М. Н. Прохождение сдвиговой волны по ортотропному волноводу из состыкованных под углом полуслоев . . . . .	86

Переварюха А. Ю., Дубровская В. А. Вычислительная модель популяционной вспышки с переопределяемой скоростью роста . . . . .	87
Петрова Е. И., Моршнева И. В. Типы ветвления автоколебаний в вертикальном слое бинарной смеси . . . . .	88
Полиенко А. В., Недорезов П. Ф., Голядкина А. А., Кириллова И. В. Биомеханика артериальных сосудов мышечно-эластического типа . . . . .	89
Половодова А. А. Идентификация неоднородных характеристик пьезоэлектрического цилиндра . . . . .	90
Портнов Е. Н., Устинов Ю. А. Анализ энергетических потерь пульсовой волны на стентированных участках артериальных сосудов . . . . .	91
Портнова М. Ю. Равновесие высокоэластичной тонкостенной трубки, одетой на негладкий абсолютно твёрдый цилиндр . . . . .	92
Пустовалова О. Г., Карякин М. И. О возможности использования пакета FlexPDE в учебных курсах по механике . . . . .	93
Ревина С. В. Длинноволновая асимптотика задачи устойчивости периодических и почти периодических течений вязкой жидкости . . . . .	94
Саакян А. В., Агаян К. Л. Метод механических квадратур в применении к решению смешанных задач механики . . . . .	95
Садырин Е. В., Митрин Б. И., Кренев Л. И., Абетковская С. О. Экспериментальное исследование неизотермического термоупругопластического контакта . . . . .	96
Сафонов Р. А., Коссович Е. Л., Кириллова И. В., Коссович Л. Ю., Донник А. М. Исследование поведения липопротеина высокой плотности в различных физических полях методом молекулярной динамики . . . . .	97
Саченков О. А., Андреев П. С., Хасанов Р. Ф., Коноплев Ю. Г. Биомеханические особенности ротационной остеотомии проксимального участка бедренной кости . . . . .	98
Саченков О. А., Мазуренко А. В., Коноплев Ю. Г. Оценка влияния степени дефицита покрытия вертлужного компонента на несущую способность эндопротеза . . . . .	99
Седов В. М., Сабанеев Н. А., Маслов Л. Б. Параметрическое исследование структурной перестройки костной ткани . . . . .	100
Семенов Б. Н., Кочнев А. С., Морозов Н. Ф., Овидько И. А. Деформирование и устойчивость нанообъектов . . . . .	101
Скалиух А. С. К общей теории необратимых процессов поляризации и деформирования . . . . .	102
Смолюк Л. Т., Смолюк А. Т., Проценко Ю. Л. Моделирование дефекта неоднородной вязкоупругой биологической ткани . . . . .	103
Соболь Б. В., Васильев П. В. Идентификация трещины в трубе с применением аппарата искусственных нейронных сетей в сочетании с методами ультразвукового контроля . . . . .	104
Соболь Б. В., Рашидова Е. В., Борисова Е. В. О влиянии покрытия произвольной толщины на концентрацию напряжений в вершинах внутренней поперечной трещины . . . . .	105

Соловьев А. Н., Скалиух А. С., Оганесян П. А., Лесняк О. В. Моделирование неоднородно поляризованных пьезоэлементов устройств накопления энергии . . . . .	106
Соловьев А. Н., Баранов И. В., Галаджева М. Р. Двухэтапный алгоритм оптимизации в обратных задачах со сложной целевой поверхностью	107
Соловьева А. А., Григоренко К. С., Хартиев С. М., Матишов Д. Г. К оценке критических воздействий внутренних волн в различных районах Мирового океана . . . . .	108
Столяр А. М., Муталибов Г. С. Методы решения задач о колебаниях тросов переменной длины . . . . .	109
Сторожев В. И., Буй Тхань Нам, Нгуен Куанг Хиеу. Модели многокритериальной оптимизации конструкций нефтедобывающих платформ	110
Сторожев В. И., Нгуен Куанг Хиеу. Моделирование эффектов стохастических нагружений на палубные конструкции нефтедобывающих платформ . . . . .	111
Сторожев С. В. Нечеткие оценки характеристик упругих волн в анизотропных средах . . . . .	112
Ткачев А. Н., Назаров А. С. Обучение нейросетевых решателей краевых задач расчета магнитного поля в кусочно-однородных средах . . . .	113
Углич П. С. Задача о колебаниях функционально-градиентного полого цилиндра . . . . .	114
Федорова Е. А., Гатаулин Я. А. Расчетное и экспериментальное исследование стационарных и пульсирующих закрученных течений в модели сосуда со стенозом . . . . .	115
Федотенков Г. В., Тарлаковский Д. В., Бугаев Н. М. Нестационарное контактное взаимодействие тонкой упругой цилиндрической оболочки с заполнителем и упругого полупространства . . . . .	116
Филимонова А. М., Говорухин В. Н. Вариант метода вихрей в ячейках для расчета плоских течений идеальной несжимаемой жидкости . .	117
Филиппова Е. Н., Кизилова Н. Н. Волны малой амплитуды в многослойных вязкоупругих трубках: взаимодействие стеночных и жидкостных мод . . . . .	118
Фоменко С. И. Волновые процессы в периодических и полупериодических упругих структурах . . . . .	119
Хайдарова Л. Р., Коссович Л. Ю. Анализ напряженно-деформированного состояния тканей прямой кишки человека . . . . .	120
Хоробров С. В., Юхнев А. Д., Гатаулин Я. А., Курапеев Д. И. Численное исследование структуры потока в новом полнопроточном искусственном клапане сердца МедИнж-СТ . . . . .	121
Хрыков С. С., Борзенков В. А., Гаврюшин С. С., Козлов А. А. Программно-планировщик для челюстно-лицевой хирургии на базе открытого исходного кода . . . . .	122
Цыбенкова О. А. Анализ устойчивости задачи электрофореза в случае решений, близких к разрыву . . . . .	123

Чебаков М. И., Ляпин А. А., Колосова Е. М. Нестационарное контактное взаимодействие в некоторых трибосистемах с учетом тепловыделения от трения . . . . .	124
Черевко В. А. Влияние агрегации эритроцитов на течение крови по цилиндрическим трубкам . . . . .	125
Чотчаева С. К., Сибирский В. В. Использование виртуальных компьютерных моделей с целью статистического анализа монтажа авиационных агрегатов . . . . .	126
Шамик В. Б., Ковалев М. С. Моделирование деформации грудной клетки	127
Шамик В. Б., Рябоконеv С. Г. О некоторых аспектах моделирования деформации стопы и походки при детском церебральном параличе . .	128
Шевцова М. С., Орозалиев Э. Э. Оптимизация гидроакустических устройств нового поколения на основе пористой пьезокерамики или перфорированных наноразмерных пленок . . . . .	129
Шестаков А. П., Шардаков И. Н., Вассерман И. Н. Влияние неоднородности миокарда на процесс возникновения аритмий . . . . .	130
Шиповская М. И. Использование бессеточного метода для компьютерного моделирования перелома . . . . .	131
Шпак А. Н., Голуб М. В., Buethe I., Fritzen С. Моделирование взаимодействия полосового пьезоактуатора с упругим слоем с помощью интегрального подхода и метода конечных элементов высокого порядка точности . . . . .	132
Шпак В. А. Неклассические варианты квазирезонансов на краевых стоячих волнах у торца анизотропного полуслоя . . . . .	133
Шпрайзер Е. И. Уточненное конечно-элементное моделирование трубчатого пьезоэлектрического вибрационного гироскопа . . . . .	134
Шукейло Е. Ю. Биомеханическая оценка стабильности фиксации фрагментарного перелома большеберцовой кости на различных этапах реабилитации пациента . . . . .	135
Юров В. О. Об особенностях волновых процессов в полом цилиндре в поле неоднородных предварительных напряжений . . . . .	136
Akishin P. Y., Barkanov E. N., Wesolowski M., Kolosova E. M. A reliable NDT characterisation of mechanical properties of composite materials .	137
Barkanov E. N., Chebakov M. I. An effective NDT characterisation of dissipative composite material properties . . . . .	138