

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И  
БИОМЕХАНИКА В СОВРЕМЕННОМ  
УНИВЕРСИТЕТЕ**

ТРУДЫ V ВСЕРОССИЙСКОЙ ШКОЛЫ-СЕМИНАРА

1 – 5 июня 2009 года

Ростов-на-Дону  
«Терра Принт»  
2009

ББК В2.Я 431

Редакторы: А. О. Ватульян, М. И. Карякин

Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов V Всероссийской школы-семинара, пос. Дивноморское, 1 – 5 июня 2009 г., Ростов-на-Дону, Издательство «Терра Принт», 2009 г., 100 с.

Сборник содержит тезисы докладов, представленные на V Всероссийскую школу-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете».

Основной целью школы-семинара являлось обсуждение современных направлений и тенденций научных исследований в области математического моделирования применительно к новым задачам механики и биомеханики. Были обсуждены результаты моделирования тел из физически и геометрически нелинейных материалов, проблемы вычислительной механики, идентификации параметров для материалов со сложными физико-механическими свойствами (пористость, нелинейность, неоднородность, микроструктура, пьезоэффект), задачи моделирования, функционирования и роста различных биологических тканей и систем (костная и мышечная ткань, ткань кровеносных сосудов), моделирование и оптимизация имплантантов.

Важным аспектом работы школы стало изучение вопросов интеграции этих направлений с процессом современного классического естественнонаучного и инженерного образования, анализ влияния междисциплинарных исследований на формирование современного ученого, обсуждение современных методов и технологий преподавания технических и естественнонаучных дисциплин, формирование новых учебных курсов и специализаций в рамках обсуждаемых на школе-семинаре научных направлений.

*V Всероссийская конференция «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 1 – 5 июня 2009 г.) поддержана Российским фондом фундаментальных исследований*

©Южный федеральный университет, 2009 г.

## Организаторы:

Южный федеральный университет

Донской государственной технической университет

Южный научный центр РАН

## Программный комитет школы-семинара:

Бауэр С. М., профессор С.-Петербургского университета

Белоконь А. В., президент Южного федерального университета, зав. кафедрой математического моделирования Южного федерального университета, Ростов-на-Дону — председатель Программного комитета

Ватульян А. О., зав. кафедрой теории упругости Южного федерального университета, Ростов-на-Дону — заместитель председателя Программного комитета

Гузев М. А., член-корреспондент РАН, директор института прикладной математики Дальневосточного отделения РАН, Владивосток

Еремеев В. А., зав. лабораторией механики активных материалов Южного научного центра РАН

Илюхин А. А., зав. кафедрой ТГПИ, Таганрог

Индейцев Д. А., член-корреспондент РАН, директор ИПМаш РАН, Санкт-Петербург

Кабельков А. Н., декан физико-математического факультета ЮРГТУ (НПИ), Новочеркасск

Коссович Л. Ю., ректор Саратовского госуниверситета, Саратов

Любимов Г. А., зав. отделом Института механики МГУ, председатель совета РАН по биомеханике

Месхи Б. Ч., ректор Донского государственного технического университета, Ростов-на-Дону

Морозов Н. Ф., академик РАН, зав. кафедрой теории упругости СПбГУ, Санкт-Петербург

Наседкин А. В., профессор Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

Няшин Ю. И., зав. кафедрой теоретической механики ПГТУ, Пермь

Пряхина О. Д., зав. кафедрой высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций КубГУ, Краснодар

Соловьев А. Н., зав. кафедрой сопротивления материалов Донского государственного технического университета, Ростов-на-Дону

Сурков Ф. А., директор НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И., зав. кафедрой глобальных информационных систем Южного федерального университета

Сухинов А. И., зав. кафедрой высшей математики технологического института Южного федерального университета, Таганрог

Тарасевич Ю. Ю., зав. кафедрой прикладной математики и информатики АГУ, Астрахань

Устинов Ю. А., профессор Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

Цатурян А. К., ведущий сотрудник Института механики МГУ (Москва), член Международного совета по биомеханике

Шевцов С. Н., зав. лаб. машиностроения и высоких технологий Южного научного центра РАН, Ростов-на-Дону

Штейн А. А., ведущий сотрудник института механики МГУ (Москва)

### Организационный комитет школы-семинара:

Карякин М. И., декан факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета - председатель Оргкомитета

Ерусалимский Я. М., профессор Южного федерального университета

Курбатова Н. В., старший преподаватель кафедры математического моделирования Южного федерального университета

Надолин К. А., заместитель декана факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета

Попов А. В., инженер кафедры теории упругости Южного федерального университета

Сафроненко В. Г., зам. директора НИИ механики и прикладной математики им. Воровича И.И. Южного федерального университета

Сухов Д. Ю., ассистент кафедры теории упругости Южного федерального университета

Цыбенкова О. А., заместитель декана факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета

## О реконструкции параметров трещин в вязкоупругом слое

**Азарова П. А., Явруян О. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

polina\_azarova86@mail.ru

В работе предложена процедура определения геометрических параметров трещины в вязкоупругом слое в случае установившихся колебаний. Нижняя грань слоя жестко закреплена, а верхняя свободна от напряжений, за исключением области приложения нагрузки. В обратной задаче на части верхней границы известна информация о полях перемещений, на основе которой и решается задача идентификации трещины.

Для того чтобы решить обратную задачу и провести вычислительный эксперимент, необходимо решить прямую задачу и получить представление полей перемещений на верхней границе. Задача о колебаниях вязкоупругого слоя решена на основе принципа соответствия в рамках концепции комплексных модулей и сведена к аналогичной упругой задаче, т. е. к задаче о колебаниях упругого слоя, в которой упругие характеристики материала заменены комплексными функциями частоты колебаний.

Решение построено при помощи преобразования Фурье. На основе формул Сомильяны получены интегральные представления для полей перемещений точек слоя, в том числе и на его поверхности. Представлена программа, позволяющая рассчитывать поля смещений.

Решение задачи определения параметров трещины построено с помощью минимизации функционала невязки, для процедуры минимизации которого применялся метод оврагов и генетические алгоритмы.

Проведено сравнение результатов восстановления параметров в случае вязкоупругого и упругого материалов, исследовано влияние вязкости на реконструкцию трещины.

### Литература

1. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир. 1974. 338 с.
2. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир. 1975. 872 с.
3. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Теория упругости. Т. VII. М.: Наука. 1978. 248 с.
4. *Ворович И. И., Бабешко В. В.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука. 1989. 320 с.
5. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка. 1981. 284 с.

## Контактные задачи для материалов с покрытиями сложной структуры с учетом изменения модуля Юнга и коэффициента Пуассона

**Айзикович С. М.\***, **Васильев А. С.\***, **Кренин Л. И.\***, **Кречко Л. М.\*\***,  
**Кузнецова Т. А.\*\***

\* *Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*

\*\* *Воронеж, Воронежская государственная лесотехническая академия*

\*\*\* *Минск, Беларусь, Институт тепло-массообмена им. Лыкова НАН*

*Белорусии*

*aiz@ctsnet.ru*

Изменение механических свойств по глубине в приповерхностном слое присуще многим материалам и конструкциям. Это вызвано как технологией их создания, так и условиями эксплуатации. В том случае, когда зона контакта сопоставима с толщиной неоднородного слоя, а различие упругих свойств подложки и покрытия достаточно велики, пренебрежение эффектом неоднородности может приводить к серьезным ошибкам в моделировании процесса деформирования основания и в определении упругих свойств неоднородного слоя.

В работе рассматривается задача о внедрении в функционально-градиентное упругое полупространство осесимметричного штампа. Предполагается, что штамп является телом вращения, подошва которого имеет параболическую форму, а контакт между штампом и неоднородным слоем гладкий.

Решение интегрального уравнения с аппроксимированным ядром строится аналитически. Таким образом, удается получить решение в виде, удобном для исследования различных эффектов, связанных с неоднородностью.

В численном эксперименте анализируется взаимовлияние непрерывно изменяющихся по глубине модуля Юнга и коэффициента Пуассона на напряженно-деформированное состояние покрытия и подложки при внедрении сферического индентора.

## Моделирование движения гибкой тонкой частицы в сдвиговом потоке жидкости

**Айзинбуд А. К.\***, **Еремеев В. А.\*\***

\* *Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

\*\* *Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*

*eremeyev.victor@gmail.com*

Предложена модель движения гибкой иглоподобной частицы в сдвиговом потоке жидкости при учете ее изгиба. Данная задача представляет интерес для понимания процессов, происходящих при получении коротковолокнистых композитов, а также задачах гидромеханики суспензий, в частности, при описании движения микро- и нановолокон инсулина в жидкости. Частица моделируется цепочкой, образованной звеньями, соединенными упругими шарнирами. Задача сводится к системе нелинейных обыкновенных уравнений относительно углов,

определяющих ориентацию каждого звена. Проведенное исследование динамики системы показало, что в зависимости от сочетания параметров задачи возможны несколько режимов, в том числе и близкие к хаотическим.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 09-01-00849-а).

## Моделирование процессов управления колебаниями ореола ресничек мерцательного эпителия

Алексеев Д. С.\* , Баду Е. И.\* , Городецкий А. Е.\*\* , Дубаренко В. В.\*\* ,  
Кучмин А. Ю.\*\* , Селиванова Е. С.\*\* , Тарасова И. Л.\*\*

\* Санкт-Петербург, НПК «Азимут»

\*\* Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН  
ris@imop.spbstu.ru

Известно [1] (Владимиров Ю. А., 1998), что важнейшую роль в функционировании клеточных органелл, в том числе, очевидно, и ресничек, играют биологические мембраны, отделяющие органеллы от окружающей клеточной среды и выполняющие роль барьера, и кальциевые «насосы», т. е. фермент кальцевые АТФазы, сокращенно Са-АТФазы. Очевидно, что и у реснички сигналом для начала натяжения динеиновых ручек (начало гребка) является повышение концентрации  $Ca^{2+}$  вблизи их основания (в базальном тельце), которая регулируется с помощью специальных кальциевых насосов, встроенных в мембрану базального тельца.

Поток  $I$  ионов через канал биологической мембраны может управляться изменением электрического потенциала  $\varphi$ , изменением концентрации ионов до  $C_1$  и после  $C_2$  мембраны, а так же изменением ее толщины  $h$ .

$$I = -uRT\gamma(C_1 - C_2)/h - uCZF d\varphi/dx, \quad (1)$$

где:  $F$  — число Фарадея,  $Z$  — валентность иона,  $T$  — абсолютная температура,  $R$  — газовая постоянная.

Первое управление более характерно для внеклеточного управления (от нервной системы), а второе — для внутриклеточного. Они достаточно полно изучены для мышечных клеток [2]. Последнее управление не изучено. Однако оно может быть ключевым для объяснения механизма автоколебаний ресничек мерцательных клеток.

По-видимому, сигналом синхронизации биений ресничек является пространственное изменение концентрации ионов кальция в перилиарной жидкости, связанное с ее волнообразным движением. Кооперативное движение ресничек одной клетки (до 300 штук) может осуществляться с помощью кортекса, однако биения ресничек некоторого ансамбля клеток, по-видимому, невозможно объяснить только лишь взаимодействием кортексов этих клеток. Во-первых, из-за большой размерности задачи (для 100 клеток необходимо синхронизировать 30000 ресничек) подобная синхронизация весьма затруднительна, а во-вторых,

передача сигналов между клетками эпителия, разделенными, например, бокало-видной клеткой, мало вероятна. Использование же химического маркера, передаваемого в перилиарной жидкости, для цели синхронизации позволяет избежать указанных проблем.

Рассмотрим следующую схему синхронизации колебаний ресничек с помощью ионов кальция. Выброс ионов кальция происходит в определенные фазы колебаний. При биении ресничек можно выделить три основные фазы: гребок, расслабление и возврат. Ресничка, таким образом, представляет собой эквивалент ждущего мультивибратора, срабатывающего по химическому маркеру. Повидимому, также существуют «генерирующие области» клеток эпителия, задающие направление и скорость биения остальных ресничек, и работающие по сигналам от нервной системы. При этом по сигналу от нервной системы в некоторой окрестности задающих гребок микротрубочек происходит кратковременное увеличение потенциала  $\varphi$  на мембране базального тельца. Последнее приводит к открытию мембранных каналов в этой области и через них проходит поток  $I$  ионов кальция, который для тонкой мембраны толщиной  $h$ , так же, как следует и из уравнения Нернста-Планка (1), пропорционален градиенту электрического потенциала в направлении оси  $X$  канала и зависит от подвижности  $u$  и концентрации ионов до мембраны  $C_1$  и за ней  $C_2$ .

Таким образом, происходит начальный запуск кальциевого насоса, приводящий к фазам колебания ресничек.

Далее поток перилиарной жидкости переносит с некоторым запаздыванием, зависящим от скорости  $V_T$  течения, ионы кальция к соседней клетке. В ней тоже возникает синхронная, но сдвинутая на некоторую фазу  $\psi(VT)$ , волна колебаний ее ресничек. Таким образом, волны колебаний распространяются вдоль всех мерцательных клеток, обеспечивая работу мукоцилиарного транспорта (МЦТ).

Исходя из известной структуры реснички, при моделировании ее колебаний можно использовать эквивалентную расчетную схему в виде системы твердых тел, соединенных упругими связями [3]. В качестве твердых тел выбраны узлы центральных белковых нитей с прикрепленными к ним спицами. Упругие элементы представляют собой безмассовые пружины с нелинейными коэффициентами жесткости и демпфирования. Силовые взаимодействия моторных белков (динеина) с белком микротрубочек реснички (тубулином) моделируются эквивалентными силами, приложенными к местам крепления спиц к микротрубочкам. Силовое взаимодействие белков связано с потоком ионов кальция, который моделируется в виде конечного автомата.

#### Литература

1. Гусев Н. Б. Молекулярные механизмы мышечного сокращения. // Соросовский образовательный журнал. Т. 6. № 8. 2000.
2. Cooke R. The mechanism of muscle contraction. CRC Crit. Rev. Biochem., 21, P. 53–118, 1986.
3. Городецкий А. Е., Дубаренко В. В., Кучмин А. Ю., Тарасова И. Л., Алексеев Д. С., Бадю Е. И. Моделирование ресниччатого аппарата мерцательных клеток. // Математическое моделирование. Т. 21, № 2, 2009



## Конечно-элементное моделирование активной вентиляции загрязненных помещений

**Алексеев Л. Н., Булыгин Ю. И., Маслов Е. И., Месхи Б. Ч.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
soloviev@math.rsu.ru

Рассматриваются задачи моделирования активной вентиляции помещений с источниками загрязнений (примесей). Примеси имеют многокомпонентную структуру, каждая из которых описывается своими параметрами, в частности вертикальной компонентой скорости оседания (для моделирования взвесей — отрицательна, для горячих газов — положительна). Общая постановка задачи состоит из многомерного (по количеству компонент) уравнения конвекции-диффузии уравнений потенциального течения газов и уравнения теплопроводности с соответствующими граничными условиями. Для упрощенной модели, которая не учитывает взаимодействия компонент примеси между собой, а температурная зависимость учитывается в направлениях скорости оседания, разработана программа в пакете FlexPDE для расчета стационарных и нестационарных задач в двумерной и трехмерной постановках. Проведены модельные расчеты и расчеты для участка обкатки готовой продукции (Ростсельмаш), на основе которых даются рекомендации по рациональному расположению элементов вентиляционного оборудования.

## Биомеханический анализ состояния мочевого пузыря в норме, при патологии, коррекции и реконструкции

**Аль-Муджагед И. И., Бегун П. И.**

*Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет*  
begun@fromru.com

В современной урологии проблема полного или частичного замещения мочевого пузыря (МП) занимает важное место [1]. В структуре смертности населения России от злокачественных опухолей удельный вес больных со злокачественными заболеваниями мочевых органов составил 6,5%, а среди мужского населения злокачественные опухоли мочевой системы занимают четвертое место.

Цель исследования. Оценить напряженно-деформированное состояние (НДС) в МП с физиологическим объемом в норме, при патологии, коррекции и реконструкции. Выявить критическое состояние МП с патологическими изменениями. Провести биомеханический анализ ортотопических МП, реконструированных по различным технологиям из сегментов желудка и подвздошной кишки.

Методы исследования. Геометрические параметры МП выявляются по рентгенограммам и томограммам. Значения модулей нормальной упругости и допускаемых напряжений определены при исследовании на растяжение образцов биологических тканей, иссеченных при хирургических операциях. Геометрические

модели построены в программе SolidWorks. Вычисления НДС в МП в норме, при патологическом образовании дивертикула и при реконструкции из сегментов желудка и подвздошной кишки проведены в конечно-элементном пакете COSMOSWorks.

Результаты работы. Разработан алгоритм построения моделей и биомеханического анализа состояния МП в норме, при патологии, коррекции и реконструкции. Проведено исследование зависимости НДС естественного, патологически измененного, подвергнутого коррекции и реконструкции МП в момент открытия внутреннего сфинктера от их геометрических параметров и механических свойств. Разработанный алгоритм позволяет проводить: 1) биомеханические исследования состояния мочевого пузыря пациента; 2) определять критическое состояние мочевого пузыря; 3) выбирать оптимальный вариант формы реконструированного мочевого пузыря в зависимости от свойств имплантата.

#### Литература

1. Морозов А. В., Павленко К. А. Ортогипический «энтеро-неоцистис» низкого давления. М: Медпрактика. М, 2006. 160 с.

#### Биомеханическое исследование состояния аорты при дилатации коарктационного сегмента у детей первых месяцев жизни

**Андриевский А. Н.\***, **Бегун П. И.\*\***, **Кривохижина О. В.\*\*\***,  
**Лебедева Е. А.\*\***, **Пантелеева Н. А.\*\***

\* Санкт-Петербург, Санкт-Петербургская государственная медицинская академия имени И.И.Мечникова

\*\* Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

\*\*\* Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения  
begun@fromgu.com

Проведены исследования НДС при дилатации коарктации аорты у детей первых лет жизни. Коарктация аорты — врожденное сужение участка аорты вплоть до полного закрытия её просвета. В наибольшей степени от коарктации аорты страдают грудные дети.

Геометрические параметры аорты с коарктацией определены по рентгенограммам. Значения модулей нормальной упругости и допускаемых напряжений аорты и коарктационного сегмента получены при исследовании на растяжение на установке Instron образцов из тканей, иссеченных при хирургических операциях. Геометрические модели построены в программе SolidWorks. Вычисления напряжений и перемещений при дилатации коарктационных сегментов проведены в конечно-элементном пакете COSMOSWorks. Сегмент дуги аорты разбит на 30 тысяч тетраэдральных конечных элементов.

Пример 1. Ребенок в возрасте 1-го месяца. Геометрические параметры и механические характеристики аорты в зоне дилатации: внутренний диаметр 4,7 мм,

толщина передней и задней стенок 0,6 мм, диаметр коарктационного сегмента 2,8 мм, длина коарктационного сегмента 4 мм, модуль нормальной упругости передней и задней стенок аорты 0,90 МПа и коарктационного сегмента 0,95 МПа, коэффициент Пуассона аорты и коарктационного сегмента 0,4. При давлении накачки баллона 727 кПа перемещение в зоне коарктации 1 мм, экстремальное значение напряжений по Мизесу 0,21 МПа.

Пример 2. Ребенок в возрасте 3-х месяцев. Геометрические параметры и механические характеристики аорты в зоне дилатации: внутренний диаметр 7,7 мм, толщина передней и задней стенок 0,7 мм, диаметр коарктационного сегмента 4,4 мм, длина коарктационного сегмента 6 мм, модуль нормальной упругости передней и задней стенок аорты 0,95 МПа и коарктационного сегмента 1,1 МПа, коэффициент Пуассона аорты и коарктационного сегмента 0,4. При давлении накачки баллона 810 кПа перемещение в зоне коарктации 1,7 мм, экстремальное значение напряжений по Мизесу 0,28 МПа.

## Идентификация реологических свойств при изгибных колебаниях

**Аникина Т. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
dsanikin@mail.ru

Биологическим тканям присущи реологические свойства. В силу сходного строения мягких биологических тканей и полимерных материалов для моделирования можно использовать классические модели механики сплошной среды. Линейные модели поведения реологических материалов основаны на моделях вязкоупругих материалов, где одной из наиболее адекватных считается модель Зинера. Она характеризуется такими параметрами, как мгновенный и длительный модули упругости, время релаксации. Задача идентификации реологических свойств материалов сводится к задаче определения этих параметров (функций) из некоторой коэффициентной обратной задачи.

В настоящей работе рассматривается проблема идентификации реологических свойств костной ткани на основе анализа вибрационных характеристик балки переменной жёсткости. Колебания балки вызываются сосредоточенной нагрузкой, приложенной в некоторой точке, а сама балка считается шарнирно опертой по краям. Переменная жёсткость моделируется зависимостью мгновенного и длительного модулей упругости от продольной координаты. Решение прямой задачи сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с непрерывным ядром. Построены амплитудно-частотные характеристики вещественной и мнимой составляющих перемещения стержня в зависимости от волнового числа для различных законов распределения мгновенного и длительного модулей упругости. Приведены результаты численных экспериментов. Выявлены возможности идентификации по данным частотного зондирования и исследована структура спектра и его влияние на процедуру реконструкции.

Рассмотрена обратная коэффициентная задача, постановка которой заключается в нахождении мгновенного и длительного модулей упругости по известным

смещениям в некотором частотном диапазоне. Построен функционал невязки, для минимизации которого использован генетический алгоритм. Приведены результаты вычислительных экспериментов для различных законов распределения искомым характеристик, иллюстрирующие возможности предлагаемого подхода по идентификации реологических свойств материалов.

## Моделирование вязкоупругих свойств изолированных образцов миокарда

**Балакин А. А.\* , Кобелев А. В.\*\* , Лукин О. Н.\* , Проценко Ю. Л.\* ,  
Смолюк Л. Т.\***

*\* Екатеринбург, Институт иммунологии и физиологии УрО РАН*

*\*\* Екатеринбург, Институт физики металлов УрО РАН*

*fusion\_lab@pisem.net*

Известно, что пассивные свойства ткани миокарда играют важную роль в насосной функции сердца, т. к. напряжение стенки камер в диастолу определяет их наполняемость и, соответственно, ударный выброс [1]. Пассивное напряжение также важно и в активном миокарде, т. к. является одним из определяющих факторов скорости сокращения кардиомиоцитов [2].

В работе представлена 2D-модель вязкоупругих свойств морфо-функционального элемента миокарда — фасцикулы. Модель представляет собой центрально-симметричную фигуру, топологически подобную поперечному срезу фасцикулы и состоящую из наклонных, продольных и поперечных упругих линейных элементов (гуковские пружины) и вязких элементов (ньютоновские демпферы). Расположение элементов модели соответствует морфологическим данным о строении соединительнотканного каркаса и цитоскелета. Кроме того, в ней используется принцип отдельного вклада основных белковых структур, входящих в состав ткани миокарда (соединительно-тканый каркас и цитоскелет кардиомиоцитов), в его вязкоупругие свойства. Модель адекватно описывает нелинейное вязкоупругое поведение изолированных образцов миокарда при продольной деформации, как в стационарном состоянии, так и при динамических режимах нагрузки. Результаты моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными на интактных препаратах папиллярной мышцы и на препаратах, подвергнутых вымачиванию в растворе NaOH. Вымачивание позволяет разрушить цитоскелет кардиомиоцитов, практически не затронув соединительно-тканый каркас [3]. Следует отметить, что в процессе вымачивания за счет удаления кардиомиоцитов происходит уменьшение геометрических размеров испытуемых препаратов, данный феномен схож с эффектом резидуального (остаточного) напряжения, наблюдаемого на целом сердце [4]. Представленная модель реализует механизм изменения геометрических размеров при вымачивании путем введения «распирающих» элементов. Таким образом, в рамках одной и той же модели с фиксированным набором исходных параметров во всем диапазоне физиологических деформаций описаны вязкоупругие свойства изолированных образцов ткани миокарда, как в интактном состоянии, так и после вымачивания кардиомиоцитов.

## О реконструкции поврежденного состояния композитов на основе сочетания МКЭ и ГА

**Баранов И. В.\***, **Напрасников В. В.\*\***, **Соловьев А. Н.\***,  
**Шевцов М. Ю.\***

\* *Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*

\*\* *Минск, Беларусь, Белорусский национальный технический университет*  
soloviev@math.rsu.ru

Рассматриваются задачи реконструкции расслоений и разрывов в слоистых композиционных материалах. Задачи формулируются как обратные геометрические задачи теории упругости идентификации интерфейсных и поперечных трещин. Трещины моделируются разрезами с невзаимодействующими берегами. В качестве дополнительной информации для решения обратных задач используется спектр собственных частот и измеренное на участке свободной поверхности волновое поле смещений при установившихся колебаниях образца.

Обратные задачи решаются на основе сочетания метода конечных элементов (ACELAN, FlexPDE) и оригинального генетического алгоритма. Рассмотрены примеры реконструкции плоскостных дефектов в плоском и трехмерном случаях.

## Физический механизм «винтовых» течений жидкости в упругой цилиндрической трубке

**Батищев В. А.**, **Загребельный М. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
batish@math.rsu.ru

В жидкости исчезающей вязкости изучены малые спиральные возмущения течения Пуазейля, втекающего в цилиндрическую трубку, ограниченную тонкой упругой оболочкой. Задача посвящена проблеме расчета «винтовых» течений жидкости, локализующихся вблизи оси цилиндра и быстро затухающих вниз по потоку. Известно, что в крупных кровеносных сосудах организма человека и животных вблизи начального сечения могут возникать винтовые течения крови, затухающие при удалении от этого сечения. Рассмотренная в докладе задача предлагает один из возможных физических механизмов «винтовых» течений. Решение построено на основе системы, состоящей из уравнений Навье-Стокса и уравнений тонкой упругой цилиндрической оболочки [1,2,3]. Для расчета спирального течения применен метод пограничного слоя. Отметим, что число Рейнольдса в крупных кровеносных сосудах велико [1]. Найдены два семейства спиральных волн, одно из которых локализовано вблизи оси цилиндра, а другое — вблизи стенок цилиндра. Построены главные члены асимптотических разложений окружной компоненты скорости и декремента затухания «винтового» течения. Физические параметры для расчета соответствуют крупным кровеносным сосудам. Показано, что вблизи оси цилиндрической трубки возникает критический

слой, в котором скорость жидких частиц совпадает с фазовой скоростью волны возмущения. В этом слое уравнения движения решены численно с использованием сращивания со степенной асимптотикой вблизи оси цилиндра. Показано, что декремент затухания «винтового» течения увеличивается при уменьшении средней скорости течения Пуазейля. «Винтовое» течение локализовано вблизи оси цилиндра и быстро ослабевает при удалении от начального сечения.

Кроме спирального течения, рассмотренного выше, построена асимптотика спиральной волны, локализованной вблизи стенок цилиндра. Эта волна вызвана вязкоупругими свойствами цилиндрической оболочки.

#### Литература

1. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М. Мир, 1983.
2. *Устинов Ю. А.* Некоторые задачи для упругих цилиндрических тел с винтовой анизотропией. Успехи механики. Т. 2, № 4, 2003.
3. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М. Мир, 1973.

### Математические модели некоторых декомпрессионных операций в офтальмологии

**Бауэр С. М., Краковская Е. В., Семенов Б. Н.**

*Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет*  
s\_bauer@mail.ru

Форму глазного яблока определяет наружная оболочка — склера. Недалеко от заднего полюса через склеру выходит зрительный нерв. Этот участок склеры, истонченный и ослабленный множеством мелких отверстий, через которые проходят нервные волокна, называют решетчатой пластинкой диска зрительного нерва. Известно, что при глаукоме атрофия зрительного нерва происходит именно из-за деформации решетчатой мембраны. В настоящее время иногда при лечении глаукомы используются декомпрессионные операции. Одна из операций состоит в том, что частично рассекаются стенки зрительного канала. Таким образом, увеличивается длина окружности опорного склерального кольца.

В прикладном пакете ANSYS строится модель такой операции. Исследуется влияние геометрических параметров надрезов на относительный и абсолютный прогибы решетчатой пластинки. Показано, что после декомпрессионной операции меняется не только прогиб решетчатой пластинки, но и прогиб склеры в области сопряжения оболочек. Форма прогиба решетчатой пластинки становится более полой, ее относительный прогиб уменьшается. Однако абсолютный прогиб решетчатой пластинки увеличивается.

Для лечения глаукомы иногда также используется операция, состоящая в нанесении надрезов склеры недалеко от лимба и помещению в них имплантатов. Построена также простейшая модель данной операции — задача об изменении деформации решетчатой пластинки после среза некоторого слоя роговицы вблизи лимба.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант N 09-01-00140a

Содержательные модели, математическое и компьютерное моделирование в дисциплине «Биомеханическое моделирование объектов протезирования»

**Бегун П. И.**

*Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет*

begun@fromru.com

Для подготовки магистров по программе «Биотехнические системы и технологии управления состоянием человека и окружающей среды» разработана программа, подготовлено методическое обеспечение и реализована в учебном процессе новая дисциплина «Биомеханическое моделирование объектов протезирования». В дисциплине изучают теоретические основы математического моделирования объектов протезирования (ОП) и методы их моделирования с использованием пакетов прикладных программ в различных областях медицинской деятельности (лекции — 42 ч., практические занятия — 14 ч.).

Содержание дисциплины:

1. Исследования ОП;
2. Содержательные модели ОП;
3. Статические стержневые модели ОП;
4. Оболочечные модели ОП;
5. Кинематические модели ОП;
6. Динамические модели ОП;
7. Конечно-элементное моделирование с использованием прикладных пакетов;
8. Физическое моделирование модели ОП;
9. Моделирование ОП в кардиологии (протезирование и коррекция кровеносных сосудов; моделирование дилатации кровеносного сосуда со склеротической бляшкой; моделирование дилатации коарктации аорты; моделирование аневризматических образований; моделирование сегмента дегенеративно-измененного артериального сосуда; моделирование сегментов артериальных сосудов с концентрированными напряжениями; моделирование левого желудочка сердца; моделирование коррекции клапанов сердца);
10. Моделирование ОП в ортопедии и травматологии (моделирование остеосинтеза костей предплечья и бедренной кости; моделирование большеберцовой кости в норме при остеонекрозе и коррекции; моделирование структур позвоночника);
11. Моделирование ОП в отоларингологии (моделирование барабанной перепонки; моделирование структур среднего уха при патологиях и коррекции барабанной перепонки; моделирование реконструкции структур среднего уха);
12. Моделирование ОП в офтальмологии (моделирование деформации решетчатой пластины склеры глаза; моделирование деформированного состояния глаза при операции по поводу отслойки сетчатки; моделирование отслоения сосудистой оболочки глаза; моделирование пломбирования глаза);

13. Моделирование ОП в урологии (моделирование мочевого пузыря в норме при патологии и реконструкции);

14. Моделирование ОП в герниологии (моделирование передней брюшной стенки при патологии и коррекции; моделирование паховой области при патологиях и коррекции).

Подготовленное к печати с грифом УМО учебное пособие объемом 25 п. л. принято издательством «Политехника».

### Численное моделирование синхронного и асинхронного механизмов двойного переноса протона в порфирине

**Бердышев Д. В.\* , Гузев М. А.\*\* , Израильский Ю. Г.\*\*\***

\**Владивосток, Тихоокеанский институт биоорганической химии ДВО РАН*

\*\**Владивосток, Институт прикладной математики ДВО РАН*

\*\*\**Владивосток, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН*

guzev@iam.dvo.ru

Наличие в молекулах хромофорного фрагмента и нескольких активных центров, между которыми может происходить перенос атомов водорода, создают условия, при которых данные реакции могут играть роль переключателей, управляющих биологической активностью природных соединений. На этом принципе работают многие природные фотосенсибилизаторы и антиоксиданты, обеспечивающие защиту организма от свободных радикалов в условиях окислительного стресса.

В данной работе рассматривается молекула порфирина — структурная основа молекул гемоглобина и хлорофилла. Для молекулы порфирина исследуется перенос двух атомов водорода («двойной перенос протонов») между четырьмя атомами азота, встроенными в плоский макроцикл молекулы. Перенос протонов может происходить с разной степенью коррелированности — синхронно («trans»→«trans» переход), когда одновременно переносятся два протона и движение происходит в четырехямном потенциале, или асинхронно («cis»→«trans»→«cis» переход), когда переносится лишь один протон и потенциал трехямный. В работе предлагается модель, в которой реакционная плоскость задается координатами атомов водорода в декартовой системе координат, связанной с центром масс молекулы, и в которой оси X и Y проходят через середины отрезков, соединяющих ближайшие друг к другу атомы азота. Для расчетов двумерных сечений поверхностной потенциальной энергии использовался метод V3LYP/6-31G(d). Геометрическая структура углеродно-азотного остова молекулы по координатам X и Y получена усреднением положения всех атомов (кроме мостиковых водородов), используя колебательные функции распределения, найденные из решения одномерных уравнений Шредингера с потенциалами, соответствующим синхронному (syn) или асинхронному (as) механизму переноса протонов.

Для этих потенциалов методом Ланцоша-Арнольди построены решения двумерного уравнения Шредингера. Показано, что в случае асинхронного механизма наблюдается рост нелинейного взаимодействия между степенями свободы



при энергиях выше потенциального барьера, приводя к качественным изменениям в картине расположения узловых линий у волновых функций. Выявлен эффект возникновения резонансов между обертонами N–N колебаний в «trans»- и обертонами плоскостных деформационных  $\angle H - -N - -N$  колебаний в «cis»-порфиринах.

Работа поддержана грантами ДВО РАН (№09-I-П4-01, № 09-II-СУ-03-002).

### Влияние дефекта на спектральные свойства полуграниченных электроупругих сред

**Березин Н. С., Пряхина О. Д., Смирнова А. В.**

*Краснодар, Кубанский государственный университет*

avega84@list.ru

В работе рассматривается связанная динамическая антиплоская задача электроупругости для пакета из двух слоев, занимающего область  $-\infty < x, z < +\infty$ ,  $-H \leq y < 0$  ( $H = 2h_1 + 2h_2$ ,  $h_k$  — полутолщина  $k$ -го слоя). Поверхность среды электродирована и подвержена гармонической электрической и сдвиговой механической нагрузке. Нижняя грань пакета жестко сцеплена с недеформируемым основанием, металлизирована и закорочена. Между слоями на глубине  $y = -2h_1$  расположен дефект — трещина шириной  $2a$ , которая моделируется линейным разрезом.

В качестве материала электроупругих слоев рассматривается пьезокерамика, поляризованная вдоль оси  $z$ . В этом случае колебания пакета будут описываться системой дифференциальных уравнений в частных производных относительно амплитуд электрического потенциала  $\varphi(x, y)$  и механического сдвигового смещения  $w(x, y)$ .

Предварительно строится решение для каждого слоя отдельно [1], а затем, используя разрывные граничные условия задачи, производится сшивка решений на границе раздела слоев, где имеет место скачок перемещений и электрического потенциала.

В результате имеем систему матрично-функциональных уравнений вида

$$\mathbf{KV} = \mathbf{U}. \quad (1)$$

Здесь векторы  $\mathbf{V} = (T_0, D_0, \Delta W, \Delta \Phi)$ ,  $\mathbf{U} = (W_1, \Phi_1, T_1, D_1)$  имеют своими компонентами трансформанты Фурье динамических характеристик задачи:  $\tau_0(x)$ ,  $d_0(x)$  — сдвиговые напряжения и нормальная составляющая вектора электрической индукции, заданные на поверхности среды,  $\Delta w(x)$ ,  $\Delta \varphi(x)$  — скачки сдвиговых перемещений и электрического потенциала при переходе через трещину,  $w_1(x, h_1)$ ,  $\varphi_1(x, h_1)$  — сдвиговые перемещения и электрический потенциал на верхней грани среды,  $\tau_1(x)$ ,  $d_1(x)$  — компоненты вектора, характеризующего взаимодействие между слоями.

$\mathbf{K} = (\mathbf{K}_{ij})_{i,j=1,2}$  является блочной матрицей-символом Грина для двухслойной среды с дефектом — трещиной и имеет вид

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_2(h_1, h_1) & \mathbf{B}_-(h_1)\mathbf{F}_1^{-1} \\ \mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{G}_1 & \mathbf{F}_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{B}_-(-h_1) - \mathbf{R}_1(h_2), \quad \mathbf{R}_1(h_2) = \mathbf{B}_+(h_2) - \mathbf{B}_-(h_2)\mathbf{F}_2^{-1}\mathbf{B}_+(-h_2),$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{B}_-(-h_2), \quad \mathbf{G}_1 = -\mathbf{B}_+(-h_1),$$

$\mathbf{R}_1(h_2)$  — матрица символ Грина для одного слоя толщиной  $2h_2$  с жестко заземленной нижней границей,  $\mathbf{R}_2(h_1, h_2)$  — матрица-символ Грина для двухслойной среды без дефекта.

Матрицы  $\mathbf{B}_\pm$  имеют размерность  $2 \times 2$  и зависят от параметра преобразования Фурье  $\alpha$ , частоты колебаний и физико-механических параметров среды.

Полученные матрично-функциональные уравнения (1) служат основой для построения системы интегральных уравнений (СИУ) динамической смешанной задачи. Дальнейшее решение СИУ строится при помощи метода фиктивного поглощения [2].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-08-00144, 09-01-96501, 09-01-96502), гранта Президента РФ (НШ-2298.2008.1).

#### Литература

1. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряжина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
2. *Кардовский И. В., Пряжина О. Д.* Метод фиктивного поглощения для плоских задач об интерфейсных трещинах // ДАН. 2006. Т. 410. № 6. С. 759–762.

### Моделирование распространения упругих волн в многослойных композитах с интерфейсными отслоениями посредством пружинных граничных условий

**Бострём А. \*, Голуб М. В. \*\***

\* *Гётеборг, Швеция, Chalmers University of Technology*

\*\* *Краснодар, Кубанский государственный университет*

m\_golub@inbox.ru

В многослойных композитных конструкциях возможно образование многочисленных микротрещин в области соединения. Такого рода повреждения, конечно же, необходимо обнаруживать методами неразрушающего контроля. Наличие хорошей модели, описывающей поведение таких отслоений, позволяет проводить параметрический анализ и изучить влияние различных параметров отслоения распространения ультразвукового сигнала через области с неидеальным контактом в местах соединений. В настоящей работе излагается схема вывода пружинных граничных условий для моделирования отслоений в плоском случае, которая во многом сходна с антиплоским случаем, рассмотренным в [1].

Аналогично [1] сначала рассматривается случай падения плоской волны на одиночную трещину между двумя полупространствами. Применением интегрального подхода [2] задача сводится к решению интегрального уравнения относительно скачка смещений берегов трещины, разрешаемое методом Петрова-Галеркина, с выбором одинаковой базисной и проекционной системы, учитывающей поведение решения в окрестности сингулярных точек. Данный подход позволяет также получить асимптотическое решение задачи, которое может быть использовано на низких частотах либо для трещин малых размеров. Переход к периодической системе трещин выполняется посредством теоремы Флоке-Блоха. Однако больший интерес представляет решение, полученное для случайно распределенных трещин одного размера. Если воспользоваться асимптотическим решением для одиночной трещины и применить осреднение по ансамблю, то поле, рассеянное на интерфейсе с дефектами, выражается в явном виде через упругие константы материалов каждого из полупространств, плотность распределения трещин и их размер. Коэффициент прохождения плоской волны через интерфейс с распределением трещин приравнивается к коэффициенту прохождения для двух полупространств с «непрерывно распределенной пружиной», дабы определить ее жесткость.

Полученная формула для жесткости распределенной пружины используется при моделировании многослойных пластин с неидеальным контактом слоев. Изучается влияние параметров отслоения на дисперсионные характеристики волновода, в частности на фазовые скорости распространения нормальных мод.

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» 2.1.1/1231.

#### Литература

1. *Boström A., Golub M.* Elastic SH wave propagation in a layered anisotropic plate with interface damage modelled by spring boundary conditions // *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 2009. No. 62, PP. 39–52.
2. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989.

### Технология реализации принципа адаптивности электронных учебных пособий

**Бушкова О. С., Русанова Я. М., Чердынцева М. И.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет  
dem@math.rsu.ru*

В настоящее время все более востребованным и актуальным становится использование и создание электронных учебных пособий. Существуют готовые программные продукты, которые можно использовать. Однако современные технологии обучения требуют для разных аудиторий преподносить накопленный и подготовленный учебный материал различным образом и в разных объемах.

Уже сформировались общепринятые принципы, которыми следует руководствоваться при создании электронного учебника, отвечающего современным требованиям. Важнейшие из них — принцип квантования, наглядности, ветвления, адаптивности и собираемости.

Первые три принципа могут быть реализованы преподавателем самостоятельно при подготовке учебного материала, его содержательной части. Именно на поддержку этих принципов в основном и направлены существующие программные продукты. Механизмов же для поддержки принципов адаптивности и собираемости в них, как правило, нет. Поэтому приходится создавать каждый вариант адаптации электронного учебника практически заново.

Согласно принципу адаптивности электронный учебник должен: 1) допускать адаптацию к нуждам конкретного пользователя в процессе учебы; 2) позволять варьировать глубину, сложность и объем изучаемого материала; 3) сопровождать изучаемый курс дополнительным иллюстративным и мультимедийным материалом.

В соответствии с принципом собираемости преподавателю должна быть предоставлена возможность: 1) выбрать необходимые фрагменты из всего имеющегося материала и собрать их в единый комплекс; 2) включать в учебник тексты, иллюстрации, схемы, видео- и аудиоматериалы, исполняемые программы, тесты; 3) не только формировать новое учебное пособие, но и многократно редактировать и дополнять его.

В итоге преподаватель сможет получить несколько вариантов учебного пособия, сформированного на базе имеющегося материала.

Именно для реализации принципов адаптивности и собираемости и предназначена разрабатываемая инструментальная среда. Она позволяет накопить и структурировать весь необходимый материал, сформировать структуру учебного пособия и создать его различные варианты.

В качестве результата работы данной инструментальной среды формируется файл описания учебника (структура содержательной части и структура оформления) и папка с содержательной частью (материалы лекций, тексты, иллюстрации, обучающие и демонстрационные программы, тестирующие программы). Для работы с полученным электронным учебником используется программа-парсер, которая по файлу описания формирует внешнее представление.

## О реконструкции расслоений в слоистых композитах на основе сочетания ГИУ и МКЭ

**Василенко С. Ю.\* , Макарчик Н. С.\*\* , Спожакин А. С.\*\***

*\*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*\*\*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*

*soloviev@math.rsu.ru*

Рассматриваются задачи реконструкции расслоений в композиционных материалах. На основе ранее разработанных методов сведения этих задач к решению последовательности систем интегральных уравнений, ядра которых строят-

ся численно, разработаны реализующие их программы в среде FlexPDE. Дополнительной информацией для решения обратных задач идентификации дефектов является волновые поля смещений, измеренные на участке свободной границы тела. В одной из них решается задача о нахождении компонент напряженного состояния на интерфейсных границах, в другой — вектора скачка перемещений. Проведены расчеты реконструкции множественных трещин в плоской задаче теории упругости для многослойного композиционного материала.

## О моделировании функционально градиентных композитов

**Ватулин С. В.\*, Вернигора Г. Д.\*\***

*\*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*\*\*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет  
soloviev@math.rsu.ru*

Рассматриваются задачи аналитического и конечно элементного моделирования функционально градиентных материалов, в том числе композиционных. С этой целью для КЭ комплекса ACELAN разработан ряд решателей и дополнительных модулей визуализации, позволяющих моделировать композитный материал, состоящий из нескольких фаз, свойства которых функционально зависят от координат. Разработанные модули применены в задачах определения эффективных свойств композиционных материалов и эффективных жесткостей пластин из функционально градиентных пен. Разработаны методы определения этих эффективных характеристик, основанные на динамической и статической эквивалентности представительных объемов и целых конструкций.

## О некоторых постановках обратных задач для упругих и пористоупругих сред

**Ватульян А. О.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет  
vatulyan@aaanet.ru*

Проблема идентификации биологических тканей является одной из важнейших проблем современной биомеханики.

Неоднородность и анизотропия, реологические свойства и пористость — вот некоторые из свойств биологических тканей, которые должны быть учтены при моделировании. Наиболее распространенным способом является учет неоднородных свойств биологических тканей на основе моделей неоднородной изотропной и анизотропной теории упругости, вязкоупругости и пороупругости, причем задача идентификации на основе акустических методов исследования приводит к коэффициентной обратной задаче для матричного дифференциального оператора в частных производных второго порядка, где требуется восстановить законы распределения длительных и мгновенных модулей упругости, плотности, пористости как функций координат.

В работе представлены две постановки обратных задач применительно к решению такого рода проблем. В первой постановке задаются граничные поля смещений как функции частоты колебаний. Реализация этого подхода основана на обобщенном соотношении взаимности и методе линеаризации. Построена последовательность краевых задач и интегральных уравнений первого рода с гладкими ядрами, позволяющих осуществлять итерационную процедуру идентификации.

Во второй постановке заданным считается поле смещений (скоростей) внутри тела, компоненты которого могут быть измерены при помощи современных томографических методов. В этом случае решение обратной задачи приводится к последовательному решению проблемы восстановления плотности и решению интегрального уравнения первого рода для восстановления модулей. При этом также обсужден подход, при реализации которого решение поставленной задачи приводится к решению уравнения (или системы) в частных производных первого порядка.

Обсуждены различные аспекты постановок задач, в том числе и проблемы единственности реконструкции различных характеристик, а также влияние различных факторов, влияющие на ее точность.

## Коэффициентные обратные задачи теплопроводности для неоднородной среды

**Ватульян А. О.\*, Нестеров С. А.\*\***

*\* Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*\*\* Таганрог, ИП Мочалова Н. Б.*

1079@list.ru

Коэффициентные обратные задачи механики и теплопроводности приобрели большое практическое применение в связи с внедрением в практику новых неоднородных материалов и возникшими технологическими проблемами контроля их качества, а также новыми задачами биомеханики по реконструкции теплофизических свойств тканей [1].

В работе предложен устойчивый к экспериментальным ошибкам подход по восстановлению одномерных законов изменения теплофизических характеристик.

Рассмотрен прямолинейный неоднородный стержень конечной длины, на одном торце которого поддерживается нулевая температура, а на другом действует постоянный тепловой поток (при нулевой начальной температуре). Требовалось по измеренной торцевой температуре на конечном временном интервале восстановить коэффициенты переноса как функции координат — произведение плотности на теплоемкость  $r(x)$  и коэффициент теплопроводности  $k(x)$ . Прямая задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода в пространстве трансформант по Лапласу. На основе решения интегрального уравнения находится температура в узловых точках на основе операционного метода [2].

Коэффициенты переноса отыскивались в два этапа. На первом этапе определялось начальное приближение в классе линейных функций методом минимизации функционала невязки, на втором этапе строился итерационный процесс по уточнению искомым функций. На основе обобщенного соотношения взаимности для неоднородных теплопроводных тел получено интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с суммируемым ядром, причем критерием выхода из итерационного процесса являлось условие стабилизации функционала невязки.

Проведена серия вычислительных экспериментов. В первой серии каждая из функций восстанавливалась, когда был известен закон изменения другой из них. При этом полученное с помощью соотношения взаимности интегральное уравнение распадалось на два независимых уравнения по восстановлению  $r(x)$  и  $k(x)$  соответственно. В ходе вычислительных экспериментов выяснено, что из-за особенностей построения ядра интегрального уравнения, восстановление функции  $k(x)$  происходит хуже, чем  $r(x)$ . Немонотонные функции восстанавливались гораздо хуже монотонных. Во второй серии экспериментов одновременно восстанавливались обе функции. Для этого дополнительно было получено второе интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, исходя из задачи с новыми граничными условиями. Результаты показали, что восстановить две функции получается не для всех законов. Хорошие результаты по реконструкции получены для монотонных тригонометрических и экспоненциальных функций, а также, если одна из функций постоянна. Проведена оценка точности восстановления в зависимости от времени начала съема информации, от выбора временного интервала, а также степени зашумления.

Работа выполнена при частичной поддержке ЮМИ ВНЦ РАН (г. Владикавказ).

#### Литература

1. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит. 2007. 224 с.
2. Нестеров С. А. Об одном методе решения нестационарной задачи теплопроводности для неоднородного стержня // Математическое моделирование и биомеханика в современном университете: Тезисы докладов всероссийской школы-семинара п. Дивноморское, 28 мая – 1 июня 2007, Ростов-на-Дону, С. 63–64.

### Задача Сен-Венана об изгибе поперечной силой призмы с ромбоэдрической анизотропией

**Ватульян К. А., Устинов Ю. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
vatulyan\_karina@mail.ru

В настоящей работе исследуется задача Сен-Венана об изгибе поперечной силой призмы с ромбоэдрической прямолинейной анизотропией. На основе метода однородных решений смещение будем искать в следующем виде:

$$u(z) = \frac{x_3^3}{6} \mathbf{a}_1 + \frac{x_3^2}{2} \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$$

где  $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (0, 0, -x_1)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (\frac{\nu}{2}(x_1^2 - x_2^2), \nu x_1 x_2, 0)$ ,  $\mathbf{a}_4 = (a_1, a_2, a_3)$ .

Для определения компонент вектора  $\mathbf{a}_4$  имеем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} (c_{11}\partial_1^2 + c_{66}\partial_2^2)a_1 + (c_{12} + c_{66})\partial_1\partial_2a_2 + 2c_{14}\partial_1\partial_2a_3 &= 0, \\ (c_{12} + c_{66})\partial_1\partial_2a_1 + (c_{11}\partial_1^2 + c_{66}\partial_2^2)a_2 + c_{14}(\partial_1^2 - \partial_2^2)a_3 &= 0, \\ 2c_{14}\partial_1\partial_2a_1 + c_{14}(\partial_1^2 - \partial_2^2)a_2 + c_{44}\Delta a_3 &= -2c_{44}\nu x_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1(c_{11}\partial_1a_1 + c_{12}\partial_2a_2 + c_{14}\partial_2a_3) + n_2(c_{14}\partial_1a_3 + c_{66}(\partial_1a_2 + \partial_2a_1)) &= \\ = -c_{14}\left(n_1\nu x_1x_2 + n_2\frac{\nu}{2}(x_1^2 - x_2^2)\right), \\ n_1(c_{14}\partial_1a_3 + c_{66}(\partial_1a_2 + \partial_2a_1)) + n_2(c_{12}\partial_1a_1 + c_{11}\partial_2a_2 - c_{14}\partial_2a_3) &= \\ = -c_{14}\left(n_1\frac{\nu}{2}(x_1^2 - x_2^2) - n_2\nu x_1x_2\right), \\ n_1(c_{44}\partial_1a_3 + (c_{14}(\partial_1a_2 + \partial_2a_1))) + n_2(c_{14}(\partial_1a_1 - \partial_2a_2) + c_{44}\partial_2a_3) &= \\ = -c_{44}\left(n_1\frac{\nu}{2}(x_1^2 - x_2^2) + n_2\nu x_1x_2\right). \end{aligned}$$

Поставленная краевая задача исследовалась методом малого параметра, в качестве которого было выбрано отношение  $\varepsilon = c_{14}/c_{44}$ .

Осуществляя разложение по малому параметру

$$a_1 = a_1^0 + \varepsilon a_1^1, \quad a_2 = a_2^0 + \varepsilon a_2^1, \quad a_3 = a_3^0 + \varepsilon a_3^1,$$

после подстановки в уравнения и граничные условия этих разложений и анализа полученных соотношений получаем, что  $a_1^0, a_2^0 = 0$ , а для  $a_3^0$  имеем следующую краевую задачу:

$$\Delta a_3^0 = -2\nu x_1,$$

$$n_1\partial_1a_3^0 + n_2\partial_2a_3^0 = -n_1\frac{\nu}{2}(x_1^2 - x_2^2) - n_2\nu x_1x_2$$

В случае прямоугольного сечения призмы ( $x_1 = \pm a, x_2 = \pm b$ ) решение данной задачи было построено методом Фурье:

$$a_3^0 = \nu \left( -\frac{x_1}{2} \left( x_2^2 + \frac{x_1^2}{3} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sinh \frac{\pi n x_1}{b} \cos \frac{\pi n x_2}{b} \right)$$

где

$$A_n = \frac{\frac{bx_2^2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x_2}{b} + \frac{2b^2x_2}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi n x_2}{b} - \frac{2b^3}{\pi^3 n^3} \sin \frac{\pi n x_2}{b}}{\pi n \cosh \frac{\pi n a}{b}}$$

Для напряжений в нулевом приближении имеем:

$$\sigma_{11} = -c_{13}x_1x_3 + O(\varepsilon),$$

$$\sigma_{22} = -c_{13}x_1x_3 + O(\varepsilon),$$

$$\sigma_{33} = -c_{33}x_1x_3 + O(\varepsilon),$$



$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= O(\varepsilon), \\ \sigma_{23} &= \partial_2 a_3^0 + \nu x_1 x_2 + O(\varepsilon), \\ \sigma_{13} &= \partial_1 a_3^0 + \frac{\nu}{2}(x_1^2 - x_2^2) + O(\varepsilon)\end{aligned}$$

Аналогичным образом анализируются задачи первого приближения, для которых необходимо использование МКЭ-технологий.

## Динамика формы высыхающей капли биологической жидкости

**Водолазская И. В., Исакова О. П., Тарасевич Ю. Ю.**

*Астрахань, Астраханский государственный университет*

tarasevich@aspu.ru

В последние годы внимание исследователей привлекли процессы, протекающие при испарении капли на горизонтальном твердом основании. Испарение капель используется при проведении тестирования лекарственных средств, в медицинской диагностике, в задачах криосохранения, при производстве микро- и наноструктурированных поверхностей и др.

Если не предпринимать специальных усилий, капля жидкости на горизонтальной поверхности высыхает при постоянной площади контакта, краевой угол при этом уменьшается. Лишь в особых случаях, когда основание особо гладкое (тефлон, свежесколотая слюда), капля при высыхании сжимается при постоянном угле смачивания. Возможно чередование двух режимов (stick and slip motion).

Закрепление линии трехфазного контакта капли на поверхности (пиннинг) может быть вызвано как шероховатостью поверхности, так и наличием в капле растворенных и взвешенных веществ. Испарение в этих условиях приводит к появлению внутри капли течений, перемещающих растворенные вещества и взвешенные частицы, и на краю капли происходит образование осадка.

При высыхании капель коллоидного раствора возможны существенные отклонения формы капли от статически равновесной формы шарового сегмента [1]. Форма капли зависит от многих факторов: объемной доли коллоидных частиц, ионной силы раствора, характера фазового перехода (золь-гель или жидкость-стекло), наличия фазового фронта.

В случае биологических жидкостей изменение формы капли в основном определяется наличием движущейся фазовой границы: центральная часть капли остается жидкой (золь), край капли — твердый (гель). Предложенные ранее модели [2,3], на наш взгляд, используют предположение, ограничивающее их область применения. К сожалению, отсутствие необходимых экспериментальных данных затрудняет построение непротиворечивых моделей. Нами предложена модель на основании закона сохранения вещества и следующих предположений:

- гелевая фаза полностью блокирует течение жидкости;
- испарение связанной воды с поверхности гелевой фазы не оказывает влияние на гидродинамические течения внутри капли;

- плотность потока пара над жидкой частью капли не может иметь сингулярностей;
- жидкая часть капли является шаровым сегментом;
- средняя объемная доля коллоидных частиц в жидкой фазе зависит от времени  $\Phi(t)$ , объемная доля коллоидных частиц в фазе геля постоянна и равна  $\Phi_g$ ;
- в соответствии с экспериментальными данными мы полагаем, что высота капли уменьшается по линейному закону;
- предполагается, что фазовая граница золь–гель строго вертикальна.

Сделанных предположений недостаточно для описания формы капли и движения фазовой границы. Необходима дополнительная информация о форме капли вблизи фазовой границы. Нами проведено моделирование для различных предположений о характере изменения формы поверхности капли вблизи фазовой границы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-08-97010-р\_поволжье\_а «Моделирование процессов переноса, фазовых переходов и самоорганизации в системах нано- и микрочастиц»).

#### Литература

1. *Pauchard L., Allain C.* Mechanical instability induced by complex liquid desiccation // C.R. Physique 4 (2003) PP. 231–239.
2. *Parise F., Allain C.* Shape Changes of Colloidal Suspension Droplets during Drying. // J. Phys. II France. 1996. Vol. 6. PP. 1111–1119.
3. *Popov Yu. O.* Evaporative deposition patterns: Spatial dimensions of the deposit // Physical Review E 71, 036313 (2005).

### Распространение волн в многослойных средах с функционально-градиентными покрытиями

**Гейнрих К. Е., Фоменко С. И.**

*Краснодар, Кубанский государственный университет  
sfom@yandex.ru*

В настоящее время пленочные покрытия становятся весьма популярными и востребованными в технике и медицине, благодаря тому, что они придают материалам дополнительные свойства, например, ударопрочность, огнестойкость, солнцезащитные, энергосберегающие и др. характеристики. Для изготовления покрытий используется порошковое напыление, спаттерное наложение, ионная имплантация и другие методы. Возникающие при этом на несущем материале микроскопические слои могут диффундировать и образовывать, таким образом, покрытие с функционально-градиентными свойствами. В работе рассматривается многослойный пакет, установившиеся гармонические колебания в каждом из

слоев которого описываются уравнениями Ламе. Целью работы является исследование влияния функционально-градиентных свойств верхнего слоя на характеристики волновых полей, возбуждаемых заданными поверхностными нагрузками. Для представления волновых полей в виде контурных интегралов используется полуаналитический алгоритм построения матрицы Грина. Интегральные представления дают возможность получить и исследовать асимптотики объемных, поверхностных и каналовых волн. Строятся графики частотных зависимостей фазовых и групповых скоростей, исследуется влияние градиентных свойств покрытия на характеристики поверхностных и каналовых волн.

Работа выполнена при поддержке АВЦП Минобрнауки РФ (проект № 1.2.1/1231).

### Волновые поля, возбуждаемые в упругой балке пьезоэлектрическими элементами: теория и эксперимент

**Глушков Е. В.\***, **Глушкова Н. В.\***, **Зеemann В.\*\***, **Кваша О. В.\***,  
**Керн Д.\*\***

*\*Краснодар, Кубанский государственный университет*

*\*\*Карlsruhe, Германия, Institute for Technical Mechanics, Karlsruhe University*  
ovk@math.kubsu.ru

Рассматривается задача о возбуждении волновых полей в упругой балке при помощи приклеенных к её поверхностям пьезоэлектрических элементов. Для описания движения балки используется теория Эйлера-Бернулли, пьезоэлектрические элементы моделируются изменяющимися по времени сосредоточенными силами, приложенными к границам областей контакта. С использованием интегрального преобразования Фурье-Лапласа возникающая здесь нестационарная краевая задача сводится к соответствующей задаче об установившихся гармонических колебаниях, допускающей элементарное аналитическое решение. В результате решение исходной нестационарной задачи получается в виде интеграла от известной функции, для вычисления которого используется подход, основанный на быстром преобразовании Фурье (FFT).

Результаты теоретических исследований сопоставляются с экспериментальными данными. Экспериментальная установка представляет собой нежёстко закреплённую на концах стальную балку с тремя приклеенными к её поверхности пьезоэлементами, два из которых используются в качестве возбудителей, а один оставшийся — в качестве сенсора. Приводятся численные результаты, иллюстрирующие процесс распространения волн при возбуждении пьезоэлементов синусоидальными сигналами с различным числом циклов и соответствующие отклики сенсоров. По результатам расчетов сделаны анимации, наглядно показывающие распространение волновых пакетов, переносимых симметричной и антисимметричной фундаментальными модами с существенно различными групповыми скоростями.

Работа поддержана грантами РФФИ № 07-01-00307 и Минобрнауки РФ № 2.1.1/1231.

## Расчет динамической реакции протяженных многослойных анизотропных структур

**Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Еремин А. А., Кривонос А. С.**

*Краснодар, Кубанский государственный университет*

eremin\_a\_87@mail.ru

Повсеместное распространение анизотропных многослойных композитных материалов обуславливает необходимость изучения их динамических свойств. В частности большой интерес представляет определение напряженно-деформированного состояния (НДС) протяженных трехмерных слоистых анизотропных структур конечной длины. Традиционным методом исследования НДС тел конечных размеров является метод конечных элементов (МКЭ). Однако большие (по сравнению с толщиной) линейные размеры и возможное значительное отличие модулей упругости слоев композита существенно осложняют проведение конечно-элементных расчетов. При больших размерах исследуемых трехмерных образцов размерность системы становится таковой, что для ее хранения требуется объем памяти, недоступный даже на многих суперкомпьютерах. Кроме того, градиент решения у границ слоев также требует существенного измельчения пространственной конечно-элементной сетки.

Для расчета таких структур предлагается использовать модификацию метода фундаментальных решений, базирующуюся на разложении по фундаментальным решениям для слоистой анизотропной среды, названным слоистыми элементами (СЭ). При такой аппроксимации автоматически удовлетворяются граничные условия на всех плоскопараллельных внутренних и внешних поверхностях слоистого материала и учитывается информация о внутренней волновой структуре решения при любом градиенте полей и контрастности упругих свойств слоев. Таким образом, с помощью СЭ аппроксимируются только граничные условия на торцах или локальных дефектах.

Работа поддержана грантами РФФИ № 07-01-00307 и Минобрнауки РФ № 2.1.1/1231.

## Проблемы нечеткого вывода на основе правил композиции

**Городецкий А. Е.**

*Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН*

g27764@yandex.ru

Модель принятия решений на основе композиционного правила вывода описывает связь всех возможных состояний сложной системы с управляющими решениями. Формально модель задается в виде тройки  $(X, R, Y)$ , где  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ;  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$  — базовые множества, на которых заданы, соответственно, входы  $A_i$  и выходы  $B_i$  системы;  $R$  — нечеткое соответствие «вход-выход». Соответствие  $R$  строится на основе словесной качественной информации специалиста (эксперта) путем непосредственной формализации его нечетких

стратегий. Эксперт описывает особенности принятия решений при функционировании сложной системы в виде ряда высказываний типа «IF  $A_1$  THEN  $B_1$ , ELSE IF  $A_2$  THEN  $B_2$ , ..., ELSE IF  $A_N$  THEN  $B_N$ ». Здесь  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — нечеткие подмножества, определенные на базовом множестве  $X$ , а  $B_1, B_2, \dots, B_N$  — нечеткие подмножества из базового множества  $Y$ . Все эти нечеткие подмножества задаются функциями принадлежности  $\mu_{A_i}(x)$  и  $\mu_{B_i}(y)$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . Правило «IF  $A_i$  ELSE  $B_i$ » характеризуется функцией принадлежности  $\mu_R = \mu_{A \rightarrow B}(x, y)$ , определяемой по одной из известных формул:

$$\mu_R(x, y) = \mu_{A \rightarrow B}(x, y) = (1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)) \wedge 1. \quad (1)$$

$$\mu_R(x, y) = \mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} \quad (2)$$

$$\mu_R(x, y) = \mu_{A \rightarrow B}(x, y) = \max\{(1 - \mu_A(x)), \mu_B(y)\} \quad (3)$$

$$\mu_R(x, y) = \mu_{A \rightarrow B}(x, y) = 1 - \mu_A(x) + \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\} \quad (4)$$

$$\mu_R(x, y) = \mu_{A \rightarrow B}(x, y) = 1 - \mu_A(x) + \mu_A(x)\mu_B(y) \quad (5)$$

Связка ELSE между правилами понимается как или-связка, поскольку общее нечеткое отношение состоит из: правило 1, или правило 2, или ..., или правило  $N$ . Поэтому общее отношение  $R$  формально можно определить как  $R = \cup R_i$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Тогда:

при использовании уравнения (1):

$$\mu_R = \max_i [(1 - \mu_{A_i}(x) + \mu_{B_i}(y)) \wedge 1], \quad (6)$$

где  $i = 1, \dots, N$ .

при использовании уравнения (2):

$$\mu_R = \max_i [\min(\mu_{A_i}(x), \mu_{B_i}(y))], \quad (7)$$

где  $i = 1, \dots, N$ .

при использовании уравнения (3):

$$\mu_R = \max_i [\max\{(1 - \mu_{A_i}(x)), \mu_{B_i}(y)\}], \quad (8)$$

где  $i = 1, \dots, N$ .

при использовании уравнения (4):

$$\mu_R = \max_i [1 - \mu_{A_i}(x) + \min \mu_{A_i}(x), \mu_{B_i}(y)], \quad (9)$$

где  $i = 1, \dots, N$ .

при использовании уравнения (5):

$$\mu_R = \max_i [1 - \mu_{A_i}(x) + \mu_{A_i}(x)\mu_{B_i}(y)]. \quad (10)$$

где  $i = 1, \dots, N$ .

Таким образом, имеется пять вариантов определения функции принадлежности отношения  $R$ , что является следствием не аксиоматичности алгебры нечетких множеств и произвольным заданием вида функции принадлежности.

Использование формулы (6) представляется не корректным, так как в ней одновременно применяются арифметические и логические операции. В формуле (7) импликация заменяется на логическое умножение (операцию «и»), что также не совсем корректно. При получении формулы (9) так же использовались одновременно логические и арифметические операции. Использование формулы (8) представляется логичным и соответствует использованию Булевой алгебры для логических выражений и интервальной алгебры для функций принадлежности. При использовании формулы (10) логические выражения описываются алгебраическими уравнениями по модулю 2, что облегчает их анализ и синтез [1]. Поэтому при логико-лингвистическом моделировании целесообразно решения логических задач выполнять в алгебре по модулю 2, введя предварительно новые переменные типа:  $z = x \oplus 1$  и вычислив их функции принадлежности  $\mu(z) = 1 - \mu(x)$ .

#### Литература

1. *Городецкий А. Е., Тарасова И. Л.* Управление и нейронные сети. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2005. 312 с.

## Математическая и компьютерная модель образования пористого кремния

**Городецкий А. Е., Дорошенко М. С.**

*Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН*

llkenny@mail.ru

Характерным примером использования СА является моделирование процесса формирования фракталоподобной структуры пористого кремния.

При этом одной из первых проблем, которую необходимо решить — это создание компактной модели исходной структуры кремния. Для ее решения можно в качестве исходной структуры кремния используется совокупность элементарных кубов (ячеек), содержащих 18 атомов. Причем не все атомы входят в один куб целиком. Некоторые атомы расположены на границе нескольких кубов и имеют связи с атомами в соседних ячейках. Совокупность таких кубов образует кристаллическую решетку кремния, являющуюся гранцентрированной кубической с четырьмя связями у каждого атома [1].

Положение любого атома в решетке может быть получено прибавлением целого числа пространственных периодов решетки к координатам одного из атомов элементарного куба. При этом пространственным периодом является размер грани куба, из которых составлена решетка. Для кремния он будет 5,43 А.

Для компактного хранения и наиболее быстрого выявления наличие связей каждого атома предлагается элементарный куб рассеять мысленно шестью плоскостями. Три параллельные плоскости провести под углом в 450 относительно

граней элементарного куба с шагом  $2,72 \text{ \AA}$  и еще три — перпендикулярно им с тем же шагом. После этого путем матричных преобразований можно получить матрицу  $C$  всех связей, присутствующих в элементарном кубе, что позволяет компактно хранить и извлекать информацию о связях атомов между собой [2].

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Следующую проблему, которую необходимо решить — это определение вероятности вытравливания каждого из атомов. В общем случае вероятность  $P_i$  вытравливания отдельного атома можно представить в виде произведения трех экспонент:

$$P_i = A e^{-\frac{n_i E_{a0}}{kT}} e^{-\sigma V(1/R_1 + 1/R_2)} e^{-\frac{E_g(R) + \delta - U_e}{4kT}}, \quad (2)$$

где  $n_i$  — число связей вытравливаемого  $i$ -го атома,  $kT$  — температура в энергетических единицах (около  $0,04 \text{ эВ}$ ),  $E_{a0}$  — энергия, идущая на одну связь между атомами кремния ( $4 \text{ эВ}$ ),  $V$  — объем одного атома в кристалле (около  $2 \cdot 10^{23} \text{ см}^3$ ),  $R_1, R_2$  — радиусы кривизны,  $\sigma$  — поверхностное натяжение,  $E_g$  — потенциальная энергия, которым должна обладать электронная дырка,  $U_e$  — величина приложенного к образцу анодного (положительного) смещения,  $R$  — радиус квантовых проволок.

Первая экспонента в выражении (2) учитывает энергию активации химической реакции и она оказывает наибольшее влияние на процесс формирования структуры пористого кремния. Она моделируется в виде клеточного автомата (SA), учитывающего связи между атомами кремния.

Следующей по значимости влияния на процесс формирования структуры пористого кремния является концентрация неосновных носителей заряда в кремнии в процессе его травления, которая зависит от величины приложенного к образцу анодного смещения  $U_e$ .

Это влияние заключается в том, что после вытравливания какого-либо атома в окрестности его бывшего местонахождения будет некоторое время отсутствовать неосновной носитель заряда, что будет фактически запрещать вытравливание атомов, находящихся в этой зоне. Это моделируется в виде стохастического клеточного автомата (SCA), учитывающего движение неосновных носителей зарядов через кремний. При этом шаг решетки неосновных носителей заряда задается значительно большим, чем шаг атомов в кремнии. Он соответствует концентрации неосновных носителей зарядов и является случайной величиной, задаваемой мат.ожиданием, зависящим от анодного смещения  $U_e$ , и дисперсией, связанной с неоднородностью среды. В этом случае именно параметры потока неосновных носителей зарядов будут играть решающую роль в образовании в кремнии фракталов того или иного вида.

Неосновные носители зарядов  $h$  обрывают связи у поверхностных атомов кремния. Образующиеся при этом ионы  $Si^{2+}$  малоустойчивы. Поэтому в дальнейшем они окисляются ионами водорода и уходят в раствор плавиковой кислоты [3]. Кроме того, два соседних иона  $Si^{2+}$  могут участвовать в реакции диспропорционирования с последующим окислением.

Рассмотренный логико-вероятностный подход к моделированию процесса формирования пористого кремния, позволил свести модель к классу SCA и, используя стандартные приемы, осуществить моделирование процесса формирования структуры пористого кремния в системе MatLab.

#### Литература

1. *Ashcroft N. W., Mermin N. D.* Solid State Physics. New York: Holt Rinehart and Winston, 1976.

2. *Gorodetskii A. E., Tarasova I. L.* Simulation of Porous Silicon Structure Formation. Mathematical Models and Computer Simulations, 2009, Vol. 1, No. 1, pp. 124–130.

3. *Б. М. Костышко, Ю. С. Назорнов.* Механизм водного дотравливания пористого кремния n-типа проводимости в электрическом поле. ЖТФ, 2001, том 71, вып. 7.

### О моделировании внутренних волн в жидкости со сложной стратификацией

**Григоренко К. С., Соловьева А. А., Хартиев С. М.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет  
microsol@km.ru*

Объектом исследований являются волновые движения в морях и океанах — внутренние волны.

В рамках линейных и нелинейных гидродинамических моделей исследуются внутренние волны в стратифицированном океане при произвольном законе распределения плотности солености и др. факторов. Анализируются дисперсионные соотношения и временные декременты затухания внутренних волн.

Разработана схема (на основе сведения краевой задачи к задаче модального анализа) и программа (на основе конечноэлементного подхода) расчета кинематических характеристик внутренних волн для создания Атласа внутренних волн Мирового океана на основе базы данных NOAA Atlas NESDIS 60 World Ocean Database.

Проведены тестовые расчеты дисперсионных характеристик и собственных форм движения для различных законов распределения плотности. Построены дисперсионные соотношения для стратификации Баренцова моря и изучена эволюция первых пяти мод. Изучен вопрос влияния аппроксимации экспериментальных данных плотностной стратификации на волновые характеристики.

Исследования такого рода необходимы для обеспечения безопасности мореплавания судов и кораблей в морях и океанах.



## Математическое моделирование кровотока во вращающемся магнитном поле

**Гришин А. Н.\* , Дунаевский Г. Е.\*\* , Корнелик С. Е.\***

*\*Томск, ООО «Научно-Производственный и Коммерческий Центр  
«ИНТЕГРАЛ» »*

*\*\*Томск, Томский государственный университет  
gan@mail.tsu.ru*

Согласно оценкам, сделанным в [1]–[2], наибольший интерес для биомедицинских приложений представляют однородные высокоамплитудные ( $< 10$  Тл) низкочастотные ( $< 20$  Гц) или постоянные магнитные поля с напряженностью до 10 Тл. Магнитные поля с такими характеристиками вызывают положительные физиологические реакции организма и значимые электрические токи и индуцированные магнитные поля в жидких средах организма, создавая необходимое электродинамическое воздействие силы Лоренца на клетки, ткани и органы.

Существует ряд актуальных биомедицинских задач, которые целесообразно решить с помощью полей с описанными свойствами. Одна из них — это создание семейства МГД — насосов для бесконтактной и неразрушающей прокачки крови в приборах вспомогательной циркуляции, так как существующие сегодня механические насосы крови повреждают ее, разрушая эритроциты. Решение этой задачи возможно только в рамках комплексных междисциплинарных НИОКР с теоретическим поиском и экспериментальной апробацией наиболее оптимальных технических решений для эффективного воздействия на кровь и кровотоки с помощью нестационарного однородного магнитного поля при максимальном коэффициенте электромеханического преобразования энергии.

В нашей работе проведено исследование влияния внешнего вращающегося однородного магнитного поля, направленного поперек кровотока в идеальном без шероховатостей цилиндрическом участке кровеносного сосуда конечной длины с непроводящими и неподвижными стенками. Решенная трехмерная модельная задача основывается на уравнениях Навье–Стокса и магнитной индукции. В качестве крови была взята однофазная электропроводящая несжимаемая ньютоновская жидкость с материальными физическими свойствами, близкими к характеристикам крови [3].

Показано, что с ростом напряженности магнитного поля степень электромеханического преобразования энергии в системе «кровоток–магнитное поле» возрастает. Установлено, что существуют частоты максимального потокосцепления и передачи энергии от поля к кровотоку. Выяснено, что при больших частотах вращения поля, происходит его «проскальзывание» с уменьшением коэффициента электромеханического преобразования энергии. Также продемонстрировано, что с ростом расхода крови через сосуд, уменьшается потокосцепление и степень преобразования энергии магнитного поля в механическую энергию кровотока.

## Литература

1. *A. A. Pilla*. Mechanisms and therapeutic applications of time-varying and static magnetic fields, In: Handbook of Biological Effects of Electromagnetic Fields, 3rd Edition. Barnes F, Green-ebaum B, eds, CRC Press, 2006.
2. Environmental Health Criteria 69, Report of World Health Organization, Magnetic fields, ISBN 9241542691, 1989.
3. *Tzirtzilakis E. E.* A mathematical model for blood flow in magnetic field. // Physics of Fluids. 2005. Vol. 17. P. 1–15. Art. No. 077103.

О растяжении и кручении цилиндрической оболочки с винтовой  
дислокацией

**Губа А. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*  
mexmat305@mail.ru

Рассматривается задача о кручении и растяжении нелинейно-упругой цилиндрической оболочки, содержащей винтовую дислокацию. Данная задача представляет интерес в связи с разработкой моделей таких тел, как хиральные нанотрубки. Кроме того, такая задача интересна и в связи с изучением конструктивных дефектов в тонкостенных элементах конструкций. Наличие дислокации влияет на диаграммы растяжения-сжатия и кручения, поскольку приводит к появлению закручивания оболочки даже в случае чистого растяжения. Исходная задача сведена к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается численно.

Анализ некоторых характеристик естественно закрученного стержня  
при изгибе поперечной силой

**Гуглева Ю. С., Курбатова Н. В., Чумакова Е. С.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
kate2811rsu@yandex.ru

Работа посвящена построению решения двумерной задачи на сечении, отвечающему элементарному решению задачи Сен-Венана изгиба поперечной силой естественно закрученного стержня (ЕЗС) прямоугольного сечения, и получению характеристик, производных от полевых переменных задачи.

Исходная краевая задача сводится к вариационной для неотрицательных квадратичных функционалов. Функционал плотности потенциальной энергии имеет неединственное решение. Единственность обеспечивается выполнением двух дополнительных условий, которые учитываются с помощью метода множителей Лагранжа. Решение вариационной задачи строится численно с помощью метода конечных элементов. Для аппроксимации используются прямоугольные конечные элементы с шестью неизвестными степенями свободы в каждом узле

(мнимые и вещественные части перемещений по пространственным координатам). В качестве базисных функций выбираются билинейные функции. Система линейных алгебраических уравнений, к которой сводится задача, является системой с неотрицательно определённой и симметричной матрицей, но при этом теряется ленточная структура матрицы вследствие введения двух дополнительных неизвестных (множителей Лагранжа). Специфика задачи заключается в том, что в ее вариационной постановке учитывается предварительно построенное конечно-элементное решение задачи чистого изгиба. Эти обстоятельства существенно усложняют процесс дискретизации задачи и получения аналитических выражений для локальных матриц.

Описанная технология конечно-элементного подхода была реализована в специально разработанном комплексе программ, предназначенном для получения аналитических выражений локальных матриц, а также для реализации конечно-элементной модели; полученные выражения используются для построения глобальной матрицы системы. В результате серии расчетов были получены численные результаты напряженно-деформированного состояния и жёсткости на изгиб ЕЗС в зависимости от значений крутки, характеризующей степень скрученности стержня. Проведено также качественное сравнение результатов, полученных на основе построенной модели и в пакете ANSYS.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 09-01-00065-а).

## Условия совместности больших деформаций и внутренние напряжения в биологических тканях

**Дерезин С. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
svd@hrz.tu-chemnitz.de

Хорошо известно [1], что рост биологических тканей и внутренние напряжения в них тесно взаимосвязаны друг с другом. В данной работе исследуется поведение мягких биологических тканей, которые в процессе своего роста, развития и функционирования способны испытывать большие деформации.

Традиционно условия совместности больших деформаций выражаются в равенстве нулю тензора кривизны Римана-Кристоффеля некоторого трёхмерного многообразия, моделирующего сплошную среду. Методами нелинейной теории упругости, описанными в работах [2,3] и основанными на полярном разложении градиента деформации, были получены условия совместности больших деформаций в новой форме, более удобной для приложений. Роль основных полевых переменных, подчиняющихся условиям совместности, играют правые и левые тензоры растяжений (т. н. тензоры «чистой» деформации). Исследуя теоретически различные виды функциональной зависимости объёмного роста мягкой ткани в квазистатическом приближении, можно убедиться в том, что лишь немногие из них производят деформации, удовлетворяющие условиям совместности. Это

означает, что для реального понимания процессов, происходящих в тканях при росте, необходимо ввести т. н. добавочные (или остаточные) деформации, которые в сумме с деформациями роста удовлетворяют условиям совместности, однако приводят к возникновению в тканях внутренних (иногда ещё их называют остаточными) напряжений, связанных с добавочными деформациями нелинейными зависимостями. Интерпретация несовместных деформаций, которыми по отдельности являются деформации роста и добавочные деформации, возможна в рамках т. н. теории изолированных и непрерывно распределённых дефектов [2,3]. Известные экспериментальные данные [1] о наличии внутренних напряжений в стенках кровеносных сосудов дополнены в данной работе теоретическими расчётами, описывающими наличие изолированных дефектов вращательного типа (дисклинаций) в несжимаемом нелинейно упругом толстостенном цилиндре.

#### Литература

1. *Fung Y. C.* Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues. Springer-Verlag, New York, 1993. 568 p.
2. *Zubov L. M.* Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997. 205 p.
3. *Дерезин С. В., Zubov Л. М.* Уравнения нелинейно упругой среды с непрерывно распределёнными дислокациями и дисклинациями. // ДАН, Т. 366, №6, 1999. С. 762–765.

Моделирование фокусирующего ультразвукового пьезоизлучателя с секционированными электродами в конечно-элементном пакете ANSYS

**Домашенкина Т. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
d-toma-v@ya.ru

Рассматриваемая задача является актуальной для проектирования и создания различных ультразвуковых приборов для медицинских применений, в которых используется сильный ультразвук и активные пьезоизлучатели. Исследуемый в работе сферический пьезоэлектрический преобразователь должен работать на толщинных модах колебаний и излучать акустические ультразвуковые волны, фокусирующиеся в заданной фокальной зоне. В качестве такого излучателя предлагается ультразвуковой пьезокерамический преобразователь в форме полусферы, разделенной на одинаковые сегменты. Полусфера имеет техническое отверстие в центре, поляризована по толщине и покрыта специальным образом секционированными электродами. Основными характеристиками, представляющими практический интерес для данной задачи, являются частоты основных толщинных электрических резонансов и антирезонансов, коэффициенты электромеханической связи, амплитудно-частотные характеристики электрического адмиттанса или импеданса отдельного пьезоизлучателя и пьезоизлучателя с учетом рабочей акустической нагрузки.

Для моделирования пьезоизлучателя был создан комплекс программ для конечно-элементного пакета ANSYS на языке APDL ANSYS. Программы позволяют строить трехмерные геометрические и конечно-элементные модели секций пьезоизлучателя, проводить расчеты частот толщинных электрических резонансов и антирезонансов, амплитудно-частотных характеристик, полей перемещений, деформаций и напряжений в преобразователе, полей давления в акустической среде и интенсивности акустического давления в фокусе для режима установившихся колебаний и при переходных процессах. Комплекс программ содержит в качестве входных параметров все необходимые геометрические размеры пьезоизлучателя, полный набор модулей пьезокерамики, добротность пьезоизлучателя, материальные константы акустической среды, а также параметры, определяющие густоту конечно-элементных сеток. Для моделирования поляризации по толщине в программах на языке APDL ANSYS для конечных элементов пьезокерамики автоматически задавались элементные системы координат с надлежащим образом повернутыми осями.

Определенные по результатам серии конечно-элементных расчетов искомые характеристики пьезоизлучателя сравнивались с полученными ранее для аналогичного фокусирующего преобразователя, но со сплошным электродным покрытием. Были также проведены расчеты для различного числа секций пьезоизлучателя. Как показали результаты численных экспериментов, многоэлектродность покрытия рассмотренной пьезокерамической полусферы позволяет управлять видом фокальной зоны рабочей акустической среды, и, таким образом, повысить эффективность и робастность пьезоизлучателя мощного ультразвука.

Автор выражает благодарность А. В. Наседкину и А. Н. Рыбянцу за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 09-01-00875).

### Об определении неоднородного предварительного напряженного состояния для стержней

**Дударев В. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
dudarev\_vv@mail.ru

Анализ прочности многих, в том числе биологических конструкций невозможен без учета предварительного напряженного состояния, которое может кардинально изменить структуру напряжений в теле. В работе формулируется задача об отыскании закона распределения предварительных напряжений в теле по данным об амплитудно-частотных характеристиках граничных полей. Представлен алгоритм отыскания одномерных зависимостей, основанный на использовании обобщенного соотношения взаимности. Приведена реализация этого подхода на примере изгибных колебаний балки. Выведены уточненные граничные условия

для задачи изгибных колебаний консольно закрепленного предварительно напряженного стержня. Осуществлено сведение прямой задачи к решению уравнения Фредгольма второго рода. Реализовано численное решение прямой задачи с использованием составной квадратурной формулы Симпсона в пакете Maple для неоднородных балок с предварительно напряженным состоянием. Обратная задача об определении закона распределения предварительного напряжения в стержне сведена к решению уравнения Фредгольма первого рода. Численное решение обратной задачи осуществлено в процессе конечного числа итераций с использованием метода А. Н. Тихонова. Представлены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению закона распределения предварительного напряжения из класса монотонных функций.

### Исследование влияния механических нагрузок на кинетику границы окостенения в пластинке роста

**Еремеев В. А.\* , Кучеева Д. О.\*\* , Фрейдин А. Б.\*\***

*\*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*

*\*\* Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН*

*eremeyev\_victor@mail.ru*

В работе обсуждается математическая модель кинетики границы окостенения между хрящом и костью в пластинки роста (эпифизарной пластинки). Процессы роста и окостенения являются фундаментальными при развитии скелета и регулируются в процессе жизни как биологическими, так и механическими факторами.

За счет процессов в пластинке роста происходит рост трубчатых костей в длину. Это делает актуальным развитие моделей пластинки роста, особенно в связи разработкой приборов, стимулирующих рост костной ткани. Процесс роста происходит в результате нескольких процессов: деление и увеличение в размере клеток хряща, но в то же время на границе окостенения идут процессы умирания клеток хряща и поступления на их место клеток кости. В результате на определенном этапе жизни толщина пластинки роста сохраняется постоянной, а длина кости увеличивается. По мере взросления организма скорость процессов деления клеток уменьшается, что ведёт к закрытию пластинки роста. Непосредственно перед закрытием пластинки роста граница между хрящом и костью перестаёт быть плоской, становится бороздчатой, бороздки (костная ткань) развиваются в сторону верхней части пластинки роста, образуя мостики, количество которых со временем увеличивается.

В предлагаемой модели пластинка роста моделируется как упругий слой («хрящевая ткань») в упругой среде («костная ткань»). Рассматриваются такие периоды жизни, в которые имеют место два одновременно конкурирующих процесса: деление и увеличение в размере клеток хряща, и умирание клеток с их заменой костной тканью; при этом толщина пластинки роста остаётся постоянной. Первые два процесса описываются как объемный рост в хряще, второй — как стационарное движение границы окостенения. Объемный рост учитывается

разложением деформации на две составляющих. Одна отвечает за процессы, связанные с ростом, другая — за упругие деформации (аналогично распространенному подходу учета пластических или температурных деформаций). На границе окостенения (граница между хрящом и костью) ставятся условия непрерывности перемещений и усилий, а также записывается кинетическое уравнение, связывающее скорость движения границы окостенения с движущей (конфигурационной, термодинамической) силой на границе. В результате исследуется влияние вида напряженно-деформированного состояния и объемного роста на стационарное движение границы окостенения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 09-01-00849).

Первые итоги асинхронного обучения на факультете математики,  
механики и компьютерных наук ЮФУ

**Ерусалимский Я. М., Ревина С. В., Чернявская И. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
dnjme@math.rsu.ru

Глобальной стратегической целью создания Южного федерального университета является создание на Юге России университета нового типа, способного стать кадровым и технологическим лидером в регионе, а по отдельным актуальным направлениям — и России в целом.

Одним из инновационных начинаний стало внедрение технологии асинхронного обучения на факультете математики, механики и компьютерных наук.

Эта технология дает возможность каждому студенту строить свою собственную образовательную траекторию. При этом учебные курсы делятся на обязательные курсы, рекомендуемые и факультативные. Для рекомендуемых определен список предметов, из которых студент может осуществлять выбор, и определен минимальный объем в кредитах этого блока дисциплин. Это дисциплины специализации, если мы говорим о специальности, или дисциплины профилизации, если речь идет о бакалаврах и магистрах, а также о дисциплинах по выбору из блока гуманитарных дисциплин.

На факультете математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета в 2008/09 уч. году идет эксперимент по разработке и внедрению асинхронной системы обучения, адаптированной к нашим российским реалиям. Подводя итоги, можно сделать следующие выводы:

Переход к асинхронному обучению оказался совершенно естественным и необходимым. Для кафедр — это отказ от полного пакета спецкурсов и переход к основным, которые должны хорошо комбинироваться с курсами других кафедр. Кто определяет выбор студента? В первую очередь, сам студент со своим научным руководителем, во вторую очередь, государственный образовательный стандарт. Этот выбор курсов не может быть абсолютно случайным, курсы должны соответствовать существующему перечню специализаций.

Что необходимо для того, чтобы система заработала? Перечислим основное:

- тщательная «идеологическая подготовка» — положение об асинхронной организации учебного процесса и готовность кафедр и преподавателей к его реализации;
- мощная информационная поддержка — на сайте факультета заведена специальная страница «Асинхронное обучение»;
- менеджер процесса — им стал заместитель декана по асинхронному обучению, прошедший для этого соответствующую подготовку;
- материальная база — достаточное количество аудиторий для составления такого расписания занятий, при котором каждый студент мог бы реализовать свой выбор;
- технология составления рабочих учебных планов должна позволять студенту сформировать свою индивидуальную траекторию.

Сколько же различных траекторий получилось у 38 студентов? Пятнадцать, при этом многие студенты добровольно «загрузили» себя в большем объеме, чем этого требовал рабочий план, т. е. возникла реальная асинхронность. Успеваемость в экспериментальном потоке оказалась самой высокой на факультете.

Асинхронная система обучения увеличивает долю самостоятельной работы студента и меняет её характер. Появляется полностью самостоятельная работа студента по ликвидации естественных нестыковок курсов. Требуют своего пересмотра и принципы планирования учебной нагрузки преподавателей.

## Квазитвердые движения тел с распределенными дислокациями

**Зеленина А. А.\* , Зубов Л. М.\*\***

*\*Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет путей  
сообщения*

*\*\*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет  
a.zelenina@gmail.com*

Рассмотрены задачи кручения и изгиба упругих призматических тел, испытывающих большие деформации и содержащих элементы микроструктуры в виде непрерывно распределенных дислокаций. Исследованы квазитвердые движения в сплошной среде, при которых в материальном теле возникает неоднородное поле конечных поворотов частиц при отсутствии удлинений и сдвигов. Найдены необходимые и достаточные условия для существования в односвязной области однозначного поля поворотов, при заданном в некоторой точке этой области значении тензора дисторсии. Показано, что при кручении кругового цилиндра и изгибе прямоугольного бруса в теле с непрерывно распределенными дислокациями могут существовать неоднородные поля поворотов при нулевых напряжениях. Приведены примеры распределенных дислокаций и определены соответствующие поля конечных поворотов. В качестве примера дислокаций, для которых



не существует квазитвердых движений, рассмотрено равномерное распределение винтовых дислокаций.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 09-01-00459.

## Компьютерное моделирование поясничного отдела позвоночника в норме и при дисковых патологиях

**Зиннатова Н. Х.**

*Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет*

snx@nm.ru

Боль в области позвоночника является одной из самых актуальных проблем современной медицины и вызывает большой научный и практический интерес. Самой частой причиной боли в позвоночнике являются патологические изменения самого позвоночника. Дегенеративные изменения в позвоночнике составляют часть общевозрастных изменений, так же как и в других системах организма. Наиболее часто страдают шейный и поясничный отделы, так как постоянно находятся в движении и, следовательно, в функциональном напряжении. Поясничные диски подвержены огромной физиологической нагрузке у человека в силу его вертикального положения.

При моделировании структур позвоночника ведущее место занимает интегральный компьютерный метод, позволяющий анализировать состояние структур биологических объектов в норме, патологии и при коррекции. Метод представляет собой симбиоз биомеханического компьютерного моделирования и анализа биологических структур по данным клинических исследований.

Современные компьютерные программы позволяют моделировать структуры позвоночного столба. Сложность геометрических форм структур позвоночника, неоднородность и анизотропия их конструктивных механических свойств предопределили построение математических моделей в рамках механики трехмерного тела и параметрических моделей, построенных методом конечных элементов в программном пакете CosmosWorks интегрированном в CAD-систему SolidWorks.

Биомеханические исследования по выявленной проблеме включают следующие этапы: 1) постановку задачи; 2) построение содержательной модели; 3) построение математической либо физической моделей и моделей с использованием пакетов прикладных программ; 4) вычисления; 5) анализ; 6) практические выводы по результатам проведенных исследований.

Рассмотрен компьютерный метод исследования и анализа состояния поясничного отдела позвоночника, позволяющий проводить прогнозирование его состояния при различных физиологических нагрузках.

За основу анализа взяты результаты экспериментальных исследований изменения предельной нагрузки  $P$  при сжатии межпозвонковых дисков от возраста. Содержательная модель построена с учетом биологических структур поясничного отдела позвоночника L1-L5: приложена осевая распределённая нагрузка к

поверхности тела позвонка сверху при  $P = 500H - 7500H$ ; жестко закреплена по нижней кромке L5. При построении моделей вводятся допущения: 1) материал костей, соединительных элементов однородный и изотропный; 2) среда сплошная, начальные напряжения в структурах отсутствуют.

Геометрическая модель здорового поясничного отдела позвоночника построена на основе данных, полученных в результате послойной визуализации томографических снимков.

Сопоставлены результаты интегральных экспериментальных исследований предельных нагрузок межпозвонковых дисков поясничного отдела позвоночника с результатами проведенных вычислений, учитывающих вариации модуля упругости в норме и при патологиях. Построенные компьютерные модели могут быть положены в основу разработки метода предоперационного прогнозирования позвоночника при различных патологических образованиях, коррекции и протезирования.

## Равновесие и устойчивость упругого цилиндра с непрерывно распределенными дисклинациями

**Зубов Л. М.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*zubov@math.rsu.ru*

Важным и распространенным элементом микроструктуры твердых тел являются дефекты типа дислокаций и дисклинаций. Эти дефекты в значительной степени определяют пластические и прочностные свойства материалов и конструкций.

В настоящей работе в рамках нелинейной теории упругости рассмотрена задача о напряженном состоянии полого кругового цилиндра, нагруженного внешним гидростатическим давлением и содержащего осесимметричное поле клиновых дисклинаций. Используется развитая ранее [1] нелинейная континуальная теория дислокаций и дисклинаций в упругих телах. Эта теория применяется к исследованию равновесия цилиндрической трубы из несжимаемого изотропного материала при заданной плотности дисклинаций, зависящей только от радиальной координаты. Указанная задача сводится к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые решены в квадратурах.

Далее построенное осесимметричное решение исследуется на устойчивость, причем параметром нагружения служит давление, равномерно распределенное по внешней поверхности трубы. Своеобразие задачи о равновесии тела с распределенными дефектами состоит в том, что поле смещений упругой среды не существует. Поэтому уравнения возмущенного равновесия получаются путем линеаризации нелинейных уравнений равновесия для напряжений и нелинейных уравнений несовместности. В работе впервые выведены линеаризованные в окрестности произвольного состояния уравнения несовместности для случая обобщенной плоской деформации. Неизвестными функциями в полученной системе уравнений нейтрального равновесия являются компоненты возмущенного

тензора деформаций. Численные результаты о влиянии распределенных дисклинаций на критические значения внешнего давления получены для модели материала Бартенева-Хазановича.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00459).

#### Литература

1. Дерезин С. В., Зубов Л. М. Уравнения нелинейно упругой среды с непрерывно распределенными дисклинациями // Докл. РАН. 1999. Т. 366. № 6. С. 762–765.

### Эколого-эволюционные изменения в водоемах Азовского бассейна при деформации климата. Модельный подход

**Ильичев В. Г.**

*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*

vita@mmbi.krinc.ru

В докладе будут предложены биологически корректные механизмы адаптации параметров популяций, которые по сравнению с традиционными эколого-эволюционными моделями содержат небольшое число переменных, и поэтому обладают высоким быстродействием. Описаны модели нижних трофических уровней Азовского моря и Цимлянского водохранилища, в которые включены механизмы адаптации водорослей к температуре и содержанию азота и фосфора в среде.

С помощью компьютерных экспериментов построены асимптотики состояния Азовского моря при деформации объема и химического состава речного стока. Обнаружено, что сокращение объема речного стока автоматически вызывает повышение азота и уменьшение фосфора в Азовских водах. Дано обоснование этого явления как результата определенного взаимодействия гидрологических и биологических процессов.

На основе модели Цимлянского водохранилища, проведено исследование действия возможного изменения климата с учетом микроэволюции водорослей. Установлено, что в ряде допустимых сценариев потепления климата в результате процессов микроэволюции холодолюбивых водорослей может произойти ограничение роста теплолюбивых водорослей.

### Численно-аналитические методы исследования характеристик механизмов с замкнутыми кинематическими цепями

**Кабельков А. Н.\*, Пасенчук А. Э.\*, Притыкин Д. Е.\*\***

*\*Новочеркасск, ЮРГТУ (НПИ)*

*\*\*Новочеркасск, ВЭЛ НИИ*

prof\_kan@mail.ru

В прикладных задачах робототехники возникают задачи синтеза программного движения роботов-манипуляторов, заключающаяся в нахождении законов

управления исполнительными приводами для обеспечения движения инструмента или захватного устройства по заданной траектории. При этом возникают также и задачи стабилизации робота-манипулятора при движении по программной траектории.

В работе рассматривается методика синтеза программного движения робота-манипулятора, а также синтеза системы стабилизирующего управления.

## Математическое моделирование систем автоведения поездов

**Кабельков А. Н.\* , Юренко К. И.\*\***

*\*Новочеркасск, ЮРГТУ (НПИ)*

*\*\*Новочеркасск, ОАО «ВЭЛНИИ»*

prof\_kan@mail.ru

Системы автоведения подвижного состава предназначены для автоматизированного управления движением поездов в соответствии с правилами технической эксплуатации железных дорог РФ. Они представляют собой микропроцессорные системы реального времени и обеспечивают выполнение расписания движения поезда при соблюдении норм безопасности с реализацией энергетически рациональных режимов движения по перегонам. Использование систем автоведения позволяет улучшить условия труда локомотивных бригад, повысить точность выполнения графика движения поездов, улучшить использование пропускной способности участков, обеспечить энергетически рациональные режимы ведения поезда, повысить безопасность движения, автоматизировать сбор и обработку данных по эксплуатации парка подвижного состава в депо, создать предпосылки для решения задачи управления в одно лицо.

Вместе с тем наладка и испытания систем автоведения на участке железной дороги занимают продолжительное время, что ведет к созданию помех движению поездов на выбранном участке, выводу локомотивов из эксплуатации на время испытаний, дополнительным расходам электроэнергии, воздействию на путь и износу оборудования локомотивов. На результаты испытаний оказывает влияние множество случайных факторов (напряжение контактной сети, сигналы светофоров, погодные условия и др.). Сложность формирования длинносоставных, тяжеловесных и сдвоенных поездов, а также риск, связанный с потенциальной опасностью схода поезда с рельс или разрыва состава при проведении испытаний на участках со сложным профилем пути, особенно при испытании новой техники, затрудняют наладку систем и испытания в критических условиях эксплуатации и выработку оптимальных режимов работы локомотивов и графика движения.

Современные возможности вычислительной техники, накопленные экспериментальные данные и проведенные за последние годы научные исследования позволяют заменить многие натурные испытания имитационным моделированием с использованием компьютерных моделей.

Моделирование процесса движения поезда осуществляется с помощью математических моделей, описывающих механику движения системы «локомотив–

состав», электромеханические процессы в тяговом приводе и силовой схеме локомотива, работу систем пневматического и электропневматического тормоза, а также функционирование задействованного в контуре управления бортового оборудования. Специализированная база данных содержит характеристики различных моделей электровозов и данные об участках железной дороги. Работа управляющих контуров системы автоведения моделируется с помощью разработанных алгоритмов и программных модулей, реализующих энергооптимальную траекторию движения поезда. Разработанный комплекс для имитационного моделирования позволяет проводить имитацию опытных поездок грузовых и пассажирских поездов на требуемом участке обслуживая в реальном масштабе времени при задании различных параметров состава, произвольных комбинациях основных и дополнительных ограничений скорости, появлении запрещающих или ограничивающих сигналов автоблокировки, возникновении нештатных ситуаций на переездах, при крайних режимах энергоснабжения и нестандартных условиях внешней среды, а также сбоях в работе оборудования.

## Упругопластическое соударение тел в случае их плотного касания

**Кадо́мцев И. Г.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*kadom@aaanet.ru*

Важность исследования неупругого соударения тел определяется, с одной стороны, практическими потребностями современной техники, с другой — необходимостью теоретического объяснения наблюдаемых экспериментальных результатов. Следует отметить, что экспериментальные исследования ударных процессов связаны с большими материальными затратами, а в то время как теоретические решения позволяют намного сократить их объем и обоснованно определить рациональную программу экспериментов. В точной постановке задачи о неупругом соударении тел приводят к нестационарным контактными задачам. Реальные материалы обладают сложным комплексом свойств, и попытки учесть их все сразу чрезвычайно усложняют решение задачи. В силу их сложности они решаются либо численно, либо приближенно. Подходы к решению таких задач зависят, как правило, от относительной скорости сближения тел. Если скорость соударения тел мала, то с результатами экспериментов хорошо согласуется квазистатическая теория Герца. Теория Герца, построенная для упругих тел, часто дает заметное расхождение с экспериментами из-за того, что уже при весьма малых скоростях соударения появляются пластические деформации. Более того, пластические деформации часто значительно превосходят упругие и на активной стадии удара последними иногда можно пренебрегать. Однако, хотя теория Герца была разработана для исследования соударения упругих тел, гипотезы, положенные в ее основу, имеют более широкое применение и могут быть использованы при рассмотрении упругопластического удара.

Многочисленные экспериментальные работы подтвердили справедливость гипотез Герца и показали, что наличие пластических деформации не сужает обла-

сти применимости основных предпосылок этой теории. Мало изученным является соударение упругопластических тел в случае неквадратичного зазора между телами. Имеющееся упругое решение Штаермана не дает границ применимости этой теории.

В данной работе используется модель упругопластического местного смятия в случае неквадратичного зазора, предложенная автором. Исследуются основные характеристики удара: местное смятие, контактная сила, время удара. Сравнение с известными экспериментальными результатами в случае параболического штампа показывает хорошее совпадение с теоретическими результатами.

### Применение программных продуктов Materialise Mimics и 3-matic для подготовки моделей биологических структур к анализу методом конечных элементов

**Казанцев А. В.**

*Киев, Materialise Ukraine*

artem.kazantsev@materialise.kiev.ua

Materialise Mimics — специализированное программное обеспечение для исследователей, работающих в области биомедицинской инженерии. Mimics позволяет осуществить переход от томограмм к точным 3D моделям.

3-matic — система автоматизированного проектирования для работы над полученными в Mimics моделями.

Полученные с помощью Mimics 3D модели могут быть применены в различных областях, перечислим их:

— Экспорт 3D моделей на машины быстрого прототипирования для получения физических копий органов человеческого тела. Модели экспортируются в формате STL, который может быть прочитан всеми машинами быстрого прототипирования, а также некоторыми моделями фрезерных станков с ЧПУ. Полученные физические модели применяются в образовании, консультировании, при проектировании медицинских устройств и биомедицинском моделировании.

— Экспорт в САПР, применяется при разработке различных имплантируемых устройств.

— Визуализация органов, полученная в Mimics, может быть более информативной, чем 3D визуализация с помощью программного обеспечения, которое поставляется вместе с томографом.

— Разработка индивидуальных имплантатов, на основании точных 3D моделей, с целью повысить их точность и качество. Полученный имплантат будет представлен в виде 3D модели, по которой затем производится реальный объект.

— Планирование хирургических операций. На полученных 3D моделях можно проводить виртуальные хирургические операции. Этим могут пользоваться как врачи, так и производители имплантатов, чтобы разработать способ установки устройства.

— Биомеханический анализ с применением точных 3D моделей. Mimics позволяет с высокой точностью воссоздать объемные модели органов человеческого

тела, которые могут быть экспортированы в системы анализа методом конечных элементов. Mimics имеет прямую связь с форматами программ Ansys, Nastran, Partran, Abaqus, Fluent и Comsol. Помимо геометрических данных, есть возможность улучшить качество и увеличить объем данных, которые переносятся в систему инженерного анализа. Для этих целей Mimics имеет специальный модуль FEA, который позволяет оптимизировать поверхностную сеть, построить объемную сеть, а также назначить свойства материала. Оптимизация представляет собой сглаживание поверхности, уменьшение количества составляющих ее треугольников и улучшение качества треугольников. На сегодняшний день доступны сведения о зависимости свойств костной ткани от яркости пикселей томограммы (чисел Хаунсфилда), эти зависимости выражаются в виде эмпирических формул. Mimics позволяет связать яркость пикселей на томограмме и объемную сеть. Таким образом, можно получать модели, полностью готовые к анализу методом конечных элементов в Ansys, которые при этом имеют свойства, приближенные к реальным. Применение Mimics значительно облегчит труд исследователя и позволит сконцентрироваться на сути научной работы, вместо затрат времени и сил на получение моделей.

#### Волны Лэмба, возбуждаемые поверхностным источником в симметричных композитах

**Кармазин А. В.\* , Кириллова Е. В.\*\* , Сыромятников П. В.\*\*\***

*\*Краснодар, Кубанский государственный университет*

*\*\*Германия, Висбаден, Университет прикладных наук*

*\*\*\*Краснодар, Южный научный центр РАН*

karmazin@itm.uka.de

В работе рассматриваются пространственные установившиеся гармонические колебания симметричных композитов, представляющие собой пакеты анизотропных слоев, симметричные относительно срединной плоскости. Кроме зоны приложения нагрузки, внешние границы пакета свободны от механических напряжений. В такой постановке возбуждаемые в слое колебания представляют собой обобщенные волны Лэмба, характеристики которых зависят от толщины, упругих свойств слоев и распределения поверхностной нагрузки.

Основными инструментами исследования в работе являются представления волновых полей в виде интегралов Фурье и алгоритм вычисления символа Фурье матрицы Грина многослойной анизотропной среды [1]. Для построения волновых полей при заданных поверхностных нагрузках применялись три метода обращения преобразования Фурье — интегрирование вычетов матрицы Грина, непосредственное вычисление контурных интегралов и метод стационарной фазы.

Ранее авторами был предложен метод приближенного вычисления обратного преобразования Фурье для случая осесимметричных источников [2]. Для несимметричных источников был разработан подход, использующий интерполяцию ядра и алгоритмы вычисления интегралов от осциллирующих функций пакета NAG [3].

В численных экспериментах рассматривались симметричные четырех- и восьмислойные композиты, каждый слой которых представлен материалом AS4/3502 [4]. Полученные дисперсионные кривые имели качественное совпадение с уже известными теоретическими и экспериментальными данными [4]. Исследованы поверхности фазовых и групповых скоростей в большом диапазоне частот. В ближней зоне поля перемещений вычислялись с помощью контурных интегралов и интегралов по вычетам, в дальней зоне амплитуды волн оценивались асимптотически. Асимптотические формулы оказываются работоспособными уже на расстоянии нескольких десятков волн от источника. Все три метода позволяют выделять и исследовать вклады отдельных мод. Построены диаграммы направленности поверхностных источников различной геометрии и нескольких видов распределений напряжений в ближней и дальней зоне.

Работа выполнена при поддержке министерства науки и образования Германии, грантов РФФИ, программы Юг России, (09-08-96527-р-юг-а), (09-08-96522-р-юг-а), (09-08-00294-а), (09-08-00170-а), (09-01-96507-р-юг-а), (08-08-00447-а), (08-01-99013-р-офи), программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

#### Литература

1. *Бабешко В. А., Сыромятников П. В.* Метод построения символа Фурье матрицы Грина многослойного электроупругого полупространства // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 5. С. 35–47.
2. *Сыромятников П. В., Ратнер С. В.* Интегральные представления термоэлектроупругих полей в многослойных средах с плоскими осесимметричными неоднородностями // Вестник ЮНЦ РАН. 2008. Т. 4. № 2. С. 12–20.
3. ©The Numerical Algorithms Group Ltd, Oxford UK. 2001. The NAG Fortran Library, Mark 20.
4. *Lei Wang, Yuan F.G.* Group velocity and characteristic wave curves of Lamb waves in composites: Modeling and experiments // Composites Science and Technology. 2007. № 67. p. 1370–1384.

#### Расчет влияния капиллярных явлений на амплитудно-частотную характеристику атомно-силового микроскопа

**Карпинский Д. Н., Шишкин А. Н.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
karp@math.rsu.ru

В настоящее время атомно-силовая микроскопия (АСМ) широко используется для изучения механических свойств образцов. Наиболее удобным режимом для этих исследований является динамический прерывистый режим (tapping mode), при котором консоль колеблется на резонансной частоте с заданной амплитудой.

Взаимодействие вершины зонда микроконсоли с поверхностью исследуемого образца изменяет динамику микроконсоли (амплитуду колебаний, резонансную



частоту, фазу). В частности, в прерывистом режиме успешно исследуются мягкие материалы: полимеры, биологические ткани, жидкости.

Для получения механических характеристик поверхности часто используют метод кривых амплитуда-фаза-расстояние (АФР) между вершиной зонда и образцом  $d_0$ . В этом методе измеряют амплитуду и фазу колебаний, а расстояние  $d_0$  увеличивают и уменьшают. При больших величинах  $d_0$  микроконсоль ведет себя как обычный осциллятор, а вблизи поверхности образца возникают нелинейности в ее колебаниях. Через анализ этих нелинейностей удается выделить важные свойства поверхности образца: адгезию, упругость, вязкоупругость.

Однако на пути анализа возникают существенные сложности, главная из которых связана образованием жидкой «шейки» между вершиной зонда микрокантилевера и поверхностью образца [1,2]. Математические модели капиллярного явления в АСМ в [1,2] используют упрощенные представления о процессе. В частности, используется модель приведенной массы для исследования колебаний микроконсоли.

В работе выполнен расчет методом конечных элементов собственных и вынужденных колебаний трехмерной термоупругой микроконсоли АСМ при учете действия капиллярных сил между вершиной зонда и поверхностью образца. Результаты расчетов показали существенное влияние капиллярных сил на интерпретацию кривых АФР, когда кроме вертикальных изгибных форм включают боковые изгибные, крутильные и формы растяжения-сжатия.

#### Литература

1. *Zitzler L., Herminghaus S., Mugele F.* Capillary forces in tapping mode atomic force microscopy. // *Phys. Rev. B*, 2002, V. 66, 155436.
2. *Wei Z., Zhao Y. P.* Growth of liquid bridge in AFM. // *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2007, V. 40, pp. 4368–4375.

#### О перспективах создания Учебно-сертификационного ИТ Центра мехмата

**Карякин М. И., Михалкович С. С., Надолин Д. К.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет  
nadolin@math.rsu.ru*

Учебная деятельность университета в целом и факультета математики, механики и компьютерных наук в частности выходит за рамки только подготовки специалистов в соответствии с государственными образовательными стандартами. Например, «нулевой» курс и воскресная компьютерная школа работают давно и плодотворно, помогая привлечь абитуриентов на факультет и устранить пробелы в их школьной подготовке.

Осенью минувшего 2008 года проявилась еще одна сфера образовательной деятельности факультета — большая группа сотрудников и преподавателей факультета проводила занятия по программе повышения квалификации ППС и

УВП Южного федерального университета. Также следует упомянуть серию краткосрочных семинаров-тренингов для преподавателей вузов, которые проводились весной 2008 года сотрудниками факультета по заказу компании Софтлайн и были посвящены знакомству с новыми программными продуктами корпорации Microsoft [1].

Результатом партнерских отношений с компанией Софтлайн стал проект создания в ЮФУ учебного центра «Академия Софтлайн», направленный на повышение качества дополнительного профессионального образования в области информационных технологий, подготовку, переподготовку и повышение квалификации специалистов в ИТ-сфере. Проект предусматривает разработку и практическую реализацию учебных программ на основе инновационного подхода, сочетающего в себе фундаментальность академического профессионального обучения и эффективность практического освоения современных технологий в специализированных учебных центрах компании Софтлайн.

Предполагается, что основными направлениями деятельности в образовательной сфере будет разработка и реализация учебных программ дополнительного профессионального образования в области информационных технологий, разработка учебно-методических материалов, пособий и учебных планов по дисциплинам специализации, разработка и апробирование новых образовательных технологий в области профессионального образования. Например, использование курсов Microsoft E-Learning [2] и других электронных корпоративных образовательных ресурсов дистанционного обучения позволит создать учебно-технологическую базу для проведения исследований и экспериментов в области профессионального образования.

В рамках сотрудничества факультета и компании Софтлайн планируется в первую очередь получить учебные материалы и реализовать такие курсы, как:

- «Основы сетевых технологий и TCP/IP» (курс AMS-110);
- «Установка и настройка Microsoft Windows Vista и приложений» (курс MS-5115);
- «Управление и поддержка среды Microsoft Windows Server 2003» (курс MS-2273);
- «Язык SQL и основы баз данных» (курс AMS-272);
- «Внедрение и поддержка баз данных Microsoft SQL Server 2005» (курс MS-2779);
- «Базовые технологии информационной безопасности» (курс AMS-120),

а также ряда других профильных курсов [3].

Таким образом, присоединение мехмата ЮФУ к проекту Softline Academy Alliance и открытие учебного центра «Академия Софтлайн», вместе с созданными в 2006-2007 гг. ИТ-Академией мехмата, реализующей партнерскую программу Microsoft IT Academy Program, и авторизованным центром тестирования

Certiport составит хорошую основу для развития Учебно-сертификационного ИТ Центра мехмата.

#### Литература

1. Бесплатное повышение квалификации преподавателей вузов. Ростов-на-Дону // электронный ресурс — [www.it-academy.ru/index.php?id=762](http://www.it-academy.ru/index.php?id=762)
2. Microsoft E-Learning Course Catalog // электронный ресурс — [www.microsoftelearning.com/catalog/](http://www.microsoftelearning.com/catalog/)
3. Учебный Центр ВМК МГУ & Softline Academy. Учебные курсы // электронный ресурс — [www.it-university.ru/courses/](http://www.it-university.ru/courses/)

### Об использовании средств компьютерной алгебры для анализа устойчивости нелинейно упругих тел канонической формы

**Карякин М. И., Сухов Д. Ю.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
devitor@mail.ru

Исследование устойчивости упругих тел представляет собой важный раздел современной теории упругости. Исследование задач устойчивости трехмерных тел базируется на нелинейной теории упругости и представляет собой достаточно сложный процесс даже для тел простой геометрии. Это, в частности, затрудняет изучение теории устойчивости студентами и аспирантами. В то же время, во многих случаях, сам процесс анализа устойчивости достаточно алгоритмичен и допускает автоматизацию основных его этапов с помощью современных средств компьютерной алгебры.

В работе представлен пакет «Nonlinear stability», реализованный в среде Maple, и осуществляющий упомянутую выше автоматизацию. Представленный пакет позволяет в интерактивном режиме пройти все шаги исследования на устойчивость равновесного состояния тела канонической формы (прямоугольника, прямоугольного параллелепипеда, кольца, цилиндра, цилиндрической трубы, сферы, сферического купола). При этом исследуемое на устойчивость равновесное состояние предполагается вызванным таким распределением внешних нагрузок, чтобы с помощью полуобратного представления задача определения напряженно-деформированного состояния сводилась к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пакет состоит из двух частей. Обучающий раздел пакета содержит набор встроенных сценариев, что позволяет использовать пакет в качестве учебного и демонстрационного пособия по курсам «Теория упругой устойчивости», «Нелинейная теория упругости», «Нелинейные задачи механики сплошной среды и биомеханики» для студентов отделений «Прикладная математика» и «Механика». При этом у студента остается достаточно много возможностей для влияния на процесс решения (выбор модели материала и ее параметров, задание геометрических характеристик исследуемого объекта и т.д.), что позволяет ставить перед ним, в том числе, и исследовательские задачи. Важной особенностью обучающего раздела является высокий уровень наглядности всех шагов решения

задачи, подробные комментарии и реальное время проведения вычислительного эксперимента. Интерактивность и наглядность представления материала основывается на использовании технологии маплетов.

Расширенная часть пакета может быть использована и при научных исследованиях. В отличие от учебной версии набор рассматриваемых задач здесь уже не ограничивается готовыми сценариями, кроме того, отсутствуют и ограничения на модель материала и на геометрические параметры тела. Это может приводить, во-первых, к весьма громоздким уравнениям даже на первом этапе определения основного напряженно-деформированного состояния, а во-вторых — к существенному падению скорости вычислений. Важной частью расширенного пакета является, поэтому, блок «внешнего решателя» — система генерирования файлов на языке C в среде Maple, их компиляции, выполнения и передачи результатов расчетов назад в среду Maple для обработки и анализа. В расширенную версию системы включена также возможность работы не только с трехмерными телами, но и с оболочками (цилиндрической и сферической); при этом уравнения теории оболочек основываются на гипотезах Кирхгофа-Лява. В качестве примера использования расширенных возможностей пакета представлены результаты моделирования порообразования на оси изолированной дисклинации в нелинейно-упругом цилиндре, а также результаты анализа задач устойчивости цилиндрических оболочек при использовании различных моделей нелинейно-упругого поведения материала оболочек.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00459-а)

## Термодинамика биологического роста: обзор математических моделей

**Кизилова Н. Н.**

*Харьков, Украина, Харьковский национальный университет*

*nnk\_@bk.ru*

Биологические системы представляют собой пример открытых термодинамических систем, которые находятся в состоянии непрерывного теплообмена с окружающей средой. Поступающие извне вещества доставляются по специальным проводящим системам и распределяются по всему объему растущего тела. Часть веществ откладывается в клетках и в виде внеклеточного вещества, обеспечивая непрерывный прирост массы, который сопровождается перестройкой микроструктуры. Разработка термодинамических моделей растущих биологических сплошных сред представляет огромный интерес для понимания ростовых процессов, для моделирования нормального, патологического и генетически модифицированного роста, а также для развития термодинамики открытых систем.

В данной работе представлен обзор моделей биологического роста на молекулярном, клеточном и тканевом уровнях. Обсуждается взаимосвязь ростовых процессов на микро-, мезо- и макроскопическом уровнях, а также взаимосвязь

транспортных и ростовых процессов в тканях растений и животных. Математические модели, описывающие кинематику ростового деформирования биологической сплошной среды, рассмотрены на примере роста листьев растений. Приведены результаты собственных измерений и экспериментов, в ходе которых были выделены несколько кинематически различных типов роста. Изотропный рост анизотропного армированного волокнами композита, каким является лист с точки зрения механики материалов, может обеспечиваться лишь согласованием скоростей роста на границе раздела волокон (проводящих элементов листа) и основной ткани (мезофилла), растущих с разными скоростями. Согласование роста возможно за счет стимулирующего действия растягивающих и угнетающего действия сжимающих напряжений. В качестве примера рассмотрены задачи о передаче нагрузки от растущей нити к пластине из растущего материала, и задачи о росте слоистой пластины при отсутствии и наличии ограничений по ее периметру.

### Высокоэластичные цилиндрические структуры сложного поперечного сечения

**Колесников А. М.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*alex\_kam@yahoo.com*

Рассматривается задача о равновесии цилиндрической оболочки. Полагаем, что после деформации оболочка осталась цилиндрической. Это позволяет свести двумерную задачу статики оболочки к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих изменение формы поперечного сечения. Удлинение оболочки вдоль образующей находится из кинематических или статических условий, накладываемых на торцах оболочки.

Исследуются мягкие оболочки из высокоэластичного материала, нагруженные только нормальной нагрузкой. В этом случае деформация и напряжения в оболочке постоянны вдоль координатных линий. При некоторых видах нормальной нагрузки решение уравнений равновесия можно получить в явном виде. Так, для части оболочки, нагруженной равномерно распределенным давлением, форма сечения будет дугой окружности. При соприкосновении двух гладких оболочек с равномерно распределённой нагрузкой на их поверхностях, форма сечения области контакта будет также дугой окружности. В случае гидростатического давления решение можно представить в виде эллиптических интегралов. А форма сечения описывается таким же уравнением, что и колебания математического маятника.

Для ряда задач, оболочку можно разделить на интервалы по типу действующих нагрузок. В таком случае решение на каждом интервале известно с точностью до некоторых постоянных. Это позволяет свести задачу к системе трансцендентных уравнений. Неизвестными задачи становятся удлинение оболочки и координаты границ интервалов. Для ряда задач решение системы уравнений возможно аналитически. В общем случае необходим эффективный численный метод для решения систем трансцендентных уравнений.

В докладе представлено исследование задач о раздувании цилиндрических конструкций сложного поперечного сечения. Одна конструкция представляет собой две тонкостенные трубы под давлением, помещенные в третью. Вторая — цилиндр круглого сечения, разделённый на одинаковые сегменты радиусами. Рассмотрены различные модели высокоэластичных несжимаемых материалов: Неогуковский, Муни-Ривлина, Бартенева-Хазановича, Черныха, Беккера-Треолара, Джента-Томаса, Фына. Получены зависимости геометрических параметров деформированных конструкций от приложенных нагрузок.

О некоторых особенностях решения задач механики контактных взаимодействий в конечно-элементном пакете ANSYS для сред с дефектами, неоднородностями и усложненными свойствами

**Колосова Е. М., Наседкин А. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
nasedkin@math.rsu.ru

В докладе рассматривается комплекс вопросов, связанных с техникой конечно-элементного исследования контактных задач для модельных и реальных трибомеханических систем с трещинами, дефектами, с неоднородностями механических свойств, а также с учетом температурных полей. Анализируются возможности конечно-элементного пакета ANSYS версии 11.0 для решения данного класса контактных задач.

На примере решения модельных задач исследуются точность конечно-элементных решений при различных типах контактных, ответных и твердотельных элементов, при различных типах конечно-элементных сеток и параметров решателей контактных задач в ANSYS. Отмечаются некоторые особенности решения контактных задач в ANSYS 11.0, например, различная точность элементов для плоских и осесимметричных задач и др.

Существенное внимание уделено вопросам конечно-элементного моделирования контактных задач с кусочно-неоднородными и функционально-градиентными механическими свойствами в зоне контакта. Предложена техника конечно-элементных аппроксимаций с постоянными механическими свойствами в пределах каждого структурного конечного элемента и автоматизированные процедуры учета неоднородностей.

Для тел с дислокациями анализируется расширенный метод конечных элементов. При данном подходе наличие дислокаций приводит к модификации вектора правых частей в уравнении равновесия метода конечных элементов, не затрагивающем матрицу жесткостей. Кроме того, формирование добавок для вектора правых частей аналогично учету главных граничных условий со значениями скачка смещений, равными значениям вектора Бюргерса. В связи с этим моделирование задач для тел с дислокациями может быть осуществлено в ANSYS при реализации процедур учета добавочных силовых факторов, вызванных дислокациями. Приводятся примеры, демонстрирующие возможности решения в ANSYS контактных задач для тел с дислокациями по описанной методике.

Для задач о контактном взаимодействии тел с трещинами рассмотрены тела с разрезами и проанализирована техника ANSYS для задач механики разрушения. Здесь использованы как обычные структурные конечные элементы, так и специальные квадратичные элементы со сдвинутыми в направлении вершины трещины серединными узлами, а также процедуры вычисления коэффициентов интенсивности напряжений и J-интегралов.

Отдельно рассмотрены вопросы моделирования контактных задач для тел с тонкими покрытиями. Дан анализ использования различных моделей оболочек, пленок и функционально-градиентных материалов для моделирования контактных явлений. Изучены вопросы учета температурных полей для решения по методу конечных элементов слабосвязанных и связанных контактных задач термоупругости. Представленная техника конечно-элементного анализа задач открывает пути к решению в ANSYS разнообразных задач контактного взаимодействия трибомеханических систем с учетом дефектов, трещин, дислокаций, тонких покрытий, неоднородностей механических свойств и температурных полей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-08-00853, 08-08-00873, 09-08-01195).

### Трехмерная контактная задача для цилиндрического шарнира с протекторными вставками

**Колосова Е. М., Чебаков М. И.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
chebakov@math.rsu.ru

Рассмотрена контактная задача теории упругости о взаимодействии жесткого деформируемого цилиндра с внутренней поверхностью цилиндрического основания, состоящего из одного кругового цилиндрического слоя конечной длины с круговыми цилиндрическими вставками из другого материала. Вставки расположены в два ряда с определенным периодом по угловой координате цилиндрической системы координат, естественным образом связанной с цилиндрическим слоем, оси цилиндрических вставок ориентированы вдоль радиусов цилиндрического основания. Внешняя поверхность цилиндрического слоя жестко закреплена, а в зоне контакта отсутствуют силы трения.

Для решения задачи используется конечно-элементный пакет ANSYS. Построение трехмерной твердотельной модели (геометрической модели с физическими свойствами) осуществлялось по технологии моделирования «снизу–вверх» с использованием следующей последовательности действий: задание опорных точек; построение дуг и прямых линий, соединяющих опорные точки; определение областей по точкам и линиям; создание объемных тел; связывание с различными телами заданных физико-механических свойств материалов.

Используя полученную трехмерную твердотельную модель, средствами пакета ANSYS построена конечно-элементная сетка упругих двадцатиузловых квадратичных конечных элементов SOLID95.

Для моделирования контактного взаимодействия цилиндра и основания границы контактирующих поверхностей покрываются на границе основания контактными парами элементов CONTA174 и на границе цилиндра — элементами TARGE170.

На торцах цилиндра заданы условия связанности узлов с одной степенью свободы: возможно только перемещение в направлении, перпендикулярном оси цилиндрического основания, на каждом торце прикладывается сосредоточенная сила такого же направления.

Были получены результаты распределения контактных и эффективных напряжений в контактной зоне.

В частном случае, когда слой однородный и величина зоны контакта соизмерима с толщиной слоя, результаты конечно-элементных расчетов контактных напряжений незначительно отличаются от аналогичных результатов, полученных на основе формул теории Герца, а также от результатов из работы [1].

Анализ полученных результатов показал, что на границах смены материала, лежащих в зоне контакта, наблюдается локальная концентрация напряжений, которая может привести к возникновению трещин и впоследствии к разрушению цилиндрического основания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Проекты №№ 09-08-01195, 08-08-00873).

#### Литература

1. Колосова Е. М., Наседкин А. В., Чебаков М. И. Расчет контактного взаимодействия в цилиндрическом подшипнике в двумерных и трехмерных постановках // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды X Международной конференции, Ростов-на-Дону, 5–9 декабря 2006 г. Т. 2. Ростов-на-Дону: изд-во ЦВВР, 2007. С. 190–196.

## Система электронного голосования в управлении современным университетом

**Кряквин В. Д., Налбандян О. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
vadkr@math.rsu.ru

Коллективному руководящему органу (например, Ученому совету факультета) для эффективного и демократического управления подразделением современного университета необходима система оперативного принятия решений. В некоторых случаях, когда нет необходимости юридически подтверждать правомерность принятых решений, можно использовать систему электронного голосования.

Предполагается, что участники голосования могут быть удалены друг от друга и используют средства сетевого взаимодействия, а подсчет голосов и доказательство его корректности производятся общим центром (инициатором голосования).



Участники взаимодействия работают с программой-клиентом, в то время как программа-сервер управляет передачей двоичной информации по сети и выполняет функции генерации данных, необходимых участникам для общего использования.

Инициатор голосования формирует название голосования, вопрос, варианты ответа и дату подведения итога, а также определяет список участников, являющихся пользователями сетевой системы. На стороне сервера генерируются параметры криптосистемы, с помощью которых центр подготавливает секретный ключ; вычисленный на его основе открытый ключ публикуется. После этого все участники получают бюллетени и приступают к голосованию. Зашифрованные голоса передаются центру и вместе с тем могут быть доступны для просмотра через открытое табло бюллетеней. В момент подведения итога центр с помощью секретного ключа извлекает из зашифрованных данных действительные варианты ответа, выбранные участниками, совершает подсчёт голосов и на основе результата принимает определённое решение, которое сервер также пересылает всем заинтересованным лицам.

Для формирования ключей и шифрования бюллетеней используется один из вариантов криптосистемы Эль-Гамала. Для проверки правильности результата голосования используется протокол Шаума и Педерсена. Используя данные открытого табло и окончательный итог голосования, каждый участник обладает возможностью проверить правильность проведённого центром подсчёта, однако при этом не получает никакой дополнительной информации относительно того, как проголосовали остальные участники. Была использована неинтерактивная форма протокола, при которой центр публикует доказательство корректности одновременно с результатом голосования, не ожидая запроса проверяющей стороны. Реализованная система обеспечивает проверяемость голосования и его секретность при условии, что инициатор голосования пользуется доверием всех участников.

Сервер и клиент разработаны на языке программирования C#. Операции с большими числами реализованы с помощью библиотеки WinNTL ([www.shoup.net](http://www.shoup.net)) на языке C++, скомпилированной в DLL, которая подключена к программам сервера и клиента. В DLL также входит промежуточный модуль на языке C++, использующий методы WinNTL для реализации конкретных протоколов и обеспечивающий взаимодействие с основным приложением.

## Об определении межфазной границы в многокомпонентном упругом теле

**Кузьменко С. М.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
simon\_kuzmen@rambler.ru

Рассмотрена задача статики для многокомпонентного упругого тела, испытывающего фазовое превращение. Тело рассматривается как смесь упругих компонент и занимает в пространстве некоторую область.

Предполагается, что тело состоит из двух фаз, разделенных достаточно гладкой поверхностью — границей раздела фаз. Ее положение заранее неизвестно и подлежит определению в ходе решения задачи. В основу решения положен вариационный принцип минимума потенциальной энергии тела, в котором наряду с перемещениями варьируется также и положение границы раздела фаз. На границе раздела фаз ставятся условия совместности для перемещений и напряжений, а также дополнительное условие, необходимое для определения границы. Оно записано в терминах тензора химического потенциала. Общая постановка проиллюстрирована примером — задачей об осесимметричной деформации двухфазного цилиндра.

## Бифуркации в системах с косимметрией

**Куракин Л. Г.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
kurakin@math.rsu.ru

Доклад посвящен теории локальных бифуркаций в косимметрических динамических системах. Актуальность проблемы связана с обнаруженными в последнее время нетривиальными косимметриями в ряде задач математической физики.

Известные ныне примеры — фильтрационная конвекция жидкости, в частности, многокомпонентной и магнитной жидкости, системы классической механики с симметричной потенциальной энергией, модели фазовых переходов антиферромагнетиков, задачи о волнах на поверхностях раздела жидкостей.

В косимметричной системе в ситуации общего положения равновесие является членом однопараметрического семейства (В. И. Юдович [1], 1991). В докладе методами Ляпунова–Шмидта и центрального многообразия проанализированы бифуркации такого семейства равновесий, а также внутренние бифуркации: переходы типа фокус–узел, узел–седло и т. д. при движении вдоль семейства. Описан ряд сценариев ветвления семейств равновесий и изменение структуры их дуг, состоящих из однотипных равновесий. Детально исследованы бифуркации устойчивых и неустойчивых дуг, слипание и распад семейств равновесий, бифуркация потери гладкости семейством равновесий, а также ответвление малого равновесного цикла от угловой точки семейства равновесий. Переменность спектра вдоль семейства вызывает ряд новых явлений, которые не встречаются ни в классическом случае изолированного равновесия, ни при бифуркации семейств равновесий системы с симметрией. Среди них затягивание по параметру ветвления семейства равновесий, потеря устойчивости по Ляпунову семейством равновесий с сохранением свойства притяжения, возникновение и гибель новых устойчивых и неустойчивых дуг на семействе равновесий.

Результаты данной работы продолжают исследования работ [2,3].

## Литература

1. Юдович В. И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Матем. заметки. 1991. Т. 49, № 5. С. 142–148.
2. Куракин Л. Г., Юдович В. И. Бифуркации при монотонной потере устойчивости равновесия косимметричной динамической системы // Докл. РАН. 2000. Т. 371, № 1. С. 29–33.
3. Kurakin L. G., Yudovich V. I. Bifurcations accompanying monotonic instability of an equilibrium of a cosymmetric dynamical system // Chaos. 2000. V. 10, № 2. PP. 311–330.

## Устойчивость томсоновских многоугольников вне круговой области

**Куракин Л. Г., Островская И. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
ostrov@math.rsu.ru

Данная работа завершает исследования устойчивости томсоновского вихревого многоугольника вне круговой области, начатые в работе Т. Х. Хавелока [1].

Модель точечных вихрей использовалась лордом Кельвиным (W. Thomson) в конце девятнадцатого века в его вихревой теории атома. Хотя эта теория была отвергнута, математическая модель выжила и приобрела новую актуальность в связи с исследованием вихрей в жидком гелии и электронных колонн в физике плазмы.

Лорд Кельвин (1878) поставил вопрос об устойчивости стационарного вращения системы  $n$  одинаковых точечных вихрей, помещенных в вершинах правильного  $n$ -угольника. Благодаря работам Дж. Дж. Томсона и Т. Х. Хавелока вопрос был полностью решен в линейной постановке. В точной нелинейной постановке ответ был получен лишь недавно [2].

Данная работа посвящена проблеме Кельвина, когда вихревой  $n$ -угольник радиуса  $R_0$  расположен вне круговой области  $R$  с общим центром симметрии. Математическими методами эта задача впервые была исследована Хавелоком (1931), рассмотревшем её в линейной постановке и показавшем, что соответствующая линеаризованная система имеет экспоненциально растущие решения при  $n \geq 7$ , а также во всех остальных случаях  $2 \leq n \leq 6$ , когда параметр  $q = \frac{R^2}{R_0^2}$  больше некоторой критической величины:  $q_{*n} < q < 1$ . Во всех остальных случаях в линейной системе имеется лишь степенная неустойчивость, обычная и неизбежная для такого рода систем.

Согласно известной теореме Ляпунова, равновесие полной системы неустойчиво, когда линеаризованная система экспоненциально неустойчива. Степенной неустойчивости линеаризованной системы для такого заключения недостаточно — нужно привлекать нелинейные слагаемые.

В работе [4] проведен полный нелинейный анализ устойчивости томсоновского вихревого треугольника и пентагона. Перечислены и исследованы все резонансы, встречающиеся в этой задаче, когда  $0 < q \leq q_{*n}$ ,  $n = 3, 5$ .

В данной работе исследована устойчивость томсоновского вихревого многоугольника в точной нелинейной постановке в случае четного числа вихрей  $n = 2, 4, 6$ . Критический случай при  $q = q_{*n}$  исследован с привлечением слагаемых ряда Тейлора гамильтониана до четвертой степени включительно.

Данная работа является естественным продолжением статьи [3], в которой проблема устойчивости томсоновских вихревых многоугольников рассматривалась внутри круговой области.

#### Литература

1. *Havelock T. H.* The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation, *Phil. Mag.*, 1931, vol. 11, № 70, pp. 617–633.
2. *Kurakin L. G., Yudovich V. I.* The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon, *Chaos*, 2002 vol. 12, pp. 574–595.
3. *Куракин Л. Г.* Устойчивость, резонансы и неустойчивость правильных вихревых многоугольников внутри круговой области, *Докл. РАН*, 2004, Т. 399, № 1, С. 52-55.
4. *Куракин Л. Г.* Устойчивость вихревого треугольника вне круговой области // Деп. в ВИНТИ №387-В2009.

#### Методика моделирования микро-нано биологических систем в виде стохастического клеточного автомата

**Кучмин А. Ю., Тарасова И. Л.**

*Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН*  
radiotelescope@yandex.ru

Стохастические клеточные автоматы (SCA — stochastic cellular automation) являются частным случаем клеточных автоматов (CA — cellular automation) [1] и используются для моделирования динамического поведения однородных сред. SCA можно представить как регулярную решетку (или таблицу) ячеек («клеток»), каждая из которых может находиться в конечном числе возможных состояний, например событий, являющихся логическими переменными  $x_i$ , принимающими значения истинности (1) или ложности (0) с некоторыми вероятностями  $P_i$ . Тогда состояние системы определяется состояниями каждой клетки с некоторой вычисляемой вероятностью  $P_c$ . Важными особенностями SCA являются следующие:

- состояние каждой ячейки обновляется в результате выполнения дискретных шагов во времени (тактов), которые могут быть случайными величинами с заданными значениями мат.ожидания и дисперсии;

- состояние каждой ячейки изменяются синхронно, исходя из состояния на предыдущем шаге с некоторой заданной вероятностью;
- правило определения нового состояния ячейки зависит от локальных состояний ячеек из некоторой окрестности данной ячейки, которая может быть случайной величиной с заданными значениями мат. ожидания и дисперсии.

СА широко используются для моделирования динамического поведения двумерных сред [2]. Каждой частице такой среды, занимающей некоторое пространство, ставится в соответствие элементарный автомат, имеющий форму квадрата (реже круга или треугольника) и именуемый клеткой. Совокупность клеток образует клеточное пространство, в котором функционирует СА. Отдельная клетка имеет конечный набор состояний  $G$ , а выходные сигналы клеток есть их текущее состояние  $g_i(k)$ . Функция переходов  $\delta_j$  определяется текущим состоянием  $g_i(k)$  клетки, а также состоянием ее окружения.

Функцию переходов  $\delta_j$  для клетки принято называть множеством правил СА. Наиболее известным примером СА считается автомат «Жизнь», придуманный в 1970 г. Дж. Конвеем [3].

СА довольно сложно использовать в качестве имитационных моделей каких-то реальных объектов и сред, особенно наноразмерных, обладающих неопределенностью и стохастизмом. Для перехода от СА к SCA «Жизнь» в приведенном выше примере отдельные или все правила изменятся следующим образом:

- клетка может находиться в двух состояниях — пассивном (0) и активном (1) с некоторой заданной, либо вычисляемой вероятностью;
- в качестве окрестности рассматривается случайное количество соседних клеток с заданными мат. ожиданием и дисперсией;
- если в окрестности пассивной клетки имеется две активные с вероятностью больше заданной, то данная клетка так же становится активной («рождается») с некоторой вероятностью, вычисляемой по правилам вычисления вероятности импликации\*;
- если в окрестности активной клетки имеется три и более активных клеток с вероятностью больше заданной, то она становится пассивной («умирает») с некоторой вероятностью, вычисляемой по правилам вычисления вероятности импликации.

При моделировании приходим к различным эволюциям состояний клеток. Причем теперь типы эволюции состояния клеток будут зависеть не только от вида начального распределения состояния клеток, но и от параметров случайных величин (мат. ожиданий и дисперсий), заданных вероятностей и номера реализации эволюции.

Как правило, моделируемые методом SCA сложные системы представляют собой открытые термодинамические системы, т. е. обменивающиеся с внешней средой веществом, импульсом, энергией, информацией и т. п., способные к диссипации (рассеянию) подводимой энергии. Единоборство этих двух субстанций

(система–среда) приводит к появлению диссипативных структур из начального случайного «бульона» субстанций. Эти структуры возникают для более эффективного противодействия внешним воздействиям, и в их симметрию вносят вклад симметрии свойств среды и внешних воздействий.

#### Литература

1. *Тоффоли Т., Марголис Н.* Машины клеточных автоматов. М.: Мир, 1991. 280 с.
2. *Советов Б. Я., Яковлев С. А.* Моделирование систем. М. : Высшая школа, 1998. 319 с.
3. Введение в математическое моделирование: Учеб. пособие./Под ред. П. В. Трусова. М.: Логос, 2005. 440 с.

Задачи управления напряжениями и вопросы оптимизации роста костной ткани при установке фиксаторов с эффектом памяти формы в челюстно-лицевой хирургии

**Кучумов А. Г., Лохов В. А., Няшин Ю. И.**

*Пермь, Пермский государственный технический университет*

kuchumov@inbox.ru

Челюстно-лицевая хирургия и стоматология ставят ряд интересных задач для биомехаников, поскольку лечение различных патологий зубочелюстной системы нацелено, в конечном счёте, на управление деформациями посредством управления напряжениями. Под управлением понимается создание в теле заданных напряжений и деформаций с помощью собственных деформаций, в частности деформаций [2]. Под собственными деформациями могут пониматься ростовые деформации и деформации, возникающие при фазовых переходах в имплантатах из сплавов с памятью формы, которые стали применяться в челюстно-лицевой хирургии [1].

В работе показана возможность управления собственными напряжениями и деформациями для скорейшего лечения переломов нижней челюсти.

В ходе операций перед хирургами встаёт проблема эффективного остеосинтеза. Использование субъективных способов решения данной задачи не всегда приводит к положительному результату (7-12% случаев осложнений) и не всегда учитывает индивидуальные особенности пациентов. С точки зрения биомеханики, при сращивании перелома важное значение имеет распределение напряжений, способствующих росту костной ткани. В работе также представлено решение задачи оптимизации о нахождении позиций установки фиксаторов и усилий, создаваемых ими таким образом, чтобы напряжения на границе перелома были наиболее близки к оптимальным. В результате в работе получены значения параметров установки скобок для различных видов переломов нижней челюсти.

## Литература

1. Гюнтер В. Э. Сплавы с памятью формы в медицине // Томск: Изд-во Томского ун-та, 1986.
2. Y. Nyashin, V. Lokhov, F. Ziegler Decomposition method in linear elastic problems with eigenstrain // Z. Angew. Math. Mech. 2005. Vol. 85, № 8. PP. 557–570.

## Математическое моделирование процесса микроциркуляции

**Кушнирёва И. В., Шабрыкина Н. С.**

*Пермь, Пермский государственный технический университет*

Kushnireva@yandex.ru

Обмен веществ между кровью и клетками ткани происходит на уровне микроциркуляторного русла, где жидкость и растворенные в ней вещества, а также частично макромолекулы переходят сквозь полупроницаемую стенку кровеносного капилляра в интерстициальное пространство, где происходит обмен веществ с клетками ткани. После чего жидкость частично всасывается обратно в кровеносное русло, частично — в лимфатические капилляры.

Все составляющие микроциркуляции ориентированны на поддержание гомеостаза всего организма. Незначительное нарушение функций одного из компонентов или полное выпадение его функции из стройного ансамбля регуляторных механизмов микроциркуляторного русла влечет за собой изменения капиллярного кровотока и, следовательно, нарушения транскапиллярного обмена.

Целью настоящей работы является выявление причин нарушения функций микроциркуляторного русла. В данной работе представлена математическая модель обменных процессов, происходящих в капилляре и окружающей его тканевой области. Ткань считается изотропной и моделируется как пороупругая среда, состоящая из упругого матрикса, который наполнен интерстициальной жидкостью с малыми скоростями течения. Ткань подчиняется линейным определяющим соотношениям, а течение жидкости через стенку капилляра — закону Старлинга. Поскольку кровь в кровеносный капилляр поступает периодически, давление на артериальном конце капилляра периодически меняется. При этом предполагалось, что давление на венозном конце остается постоянным и в каждый момент времени распределение давления по капилляру линейное.

В данной работе рассмотрено нестационарное установившееся течение жидкости в ткани, окружающей кровеносный капилляр, без учета лимфатического дренажа для конечной тканевой области, окружающей одиночный кровеносный капилляр.

Для этого в данной работе решалась задача Лапласа для области вне цилиндра с граничными условиями первого, второго и третьего рода. В результате методами математической физики получено распределение давления тканевой жидкости, а также распределение скоростей течения жидкости в тканевой области и найдена объёмная скорость фильтрации. Это позволяет сделать количественную оценку обменных процессов, происходящих в микроциркуляторном русле.

## Литература

1. *И. В. Кушнирева, К. В. Подъянова, Н. С. Шабрыкина* Модель стационарного течения жидкости в ткани с учётом транскапиллярного обмена // 16-я Всероссийская школа-конференция молодых ученых и студентов «Математическое моделирование в естественных науках». — Пермь. 3–6 октября 2007: Пермский Государственный Технический Университет, 2007, с. 56.
2. *Ткаченко Б. И.* Физиология кровообращения: физиология сосудистой системы (Руководство по физиологии) — Л.: Наука, 1984. — 652 с.
3. *Федорович А. А.* Капиллярная гемодинамика в эпонихии верхней конечностей. — ЗАО Центр «Анализ веществ», Москва.

## Веб-технологии для людей с ограниченными физическими возможностями

**Лавриненко В. В.**

*Ростов-на-Дону, ООО «Техно-Арт»  
val@metod.ru*

В мае 2008 года вступила в силу Конвенция ООН о правах инвалидов. В ней заложены положения, согласно которым доступ к информационным и коммуникационным технологиям — такое же право людей с ограниченными возможностями, как и право на доступ к физической окружающей среде и средствам транспорта. Решению проблемы доступности веб-контента для инвалидов были адресованы рекомендации, разработанные в 1999 году W3C — Web Content Accessibility Guidelines (WCAG). В конце 2008 года была принята новая – вторая – версия Рекомендаций, а с 2009 года в России вступил в силу ГОСТ Р 52872-2007 «Интернет-ресурсы. Требования доступности для инвалидов по зрению».

Несмотря на наличие всеобъемлющих рекомендаций, большинство сайтов и других ресурсов, использующих в своей основе веб-технологии, пока не адаптировано для просмотра людьми с ограниченными физическими возможностями. При этом веб-технологии могут стать полезным инструментом, помочь найти работу и получить образование тем, кому ранее это было сложно или недоступно, — людям со слабым зрением, с нарушениями опорно-двигательного аппарата.

Также важно обеспечить равноправный доступ людей с ограниченными физическими возможностями к образованию. Системы электронного, дистанционного образования сложны и зачастую не приспособлены для адаптации таких пользователей. В настоящее время в России государственные органы в результате воздействия многих общественных организаций и влияния мировых тенденций обратили пристальное внимание на доступность людей с ограниченными возможностями к информационным ресурсам и сервисам. Для обеспечения такой доступности существуют некоторые технологические и аппаратные решения; активно ведется разработка новых способов повышения доступности электронных ресурсов для пользователей с ограниченными физическими возможностями.



Моделирование вторичного течения последовательностью краевых задач с кратными собственными значениями

**Ларченко В. В.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
lar@rsu.ru

Пусть  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $n < \infty$ ,  $i \in N$ ,  $\mathcal{D} = (-1, 1) \times (-\infty, \infty)$ ,  $\Delta^\pm(\cdot) = \partial_{xx}^2(\cdot) \pm \partial_{zz}^2(\cdot)$ ,  $\delta \in (-r, r)$ ,  $r \ll 1$ ,  $\lambda, l, \beta_i, c_i \in \mathbb{R}$ . Для описания конвективного течения в вертикальном поле  $\mathbf{g}$  в окрестности точек ветвления сформулирована последовательность краевых задач

$$(x, z) \in \mathcal{D}, \Delta t + \delta \eta(x)(1 - \text{sign}|\theta - \theta^*|) = \sum_{j=1}^n c_j \langle \nabla \Psi^j \circ \nabla t \rangle, \quad (1)$$

$$\lambda \Delta^2 \Psi^i + \beta_i \partial_x t = \sum_{j=1}^n p_{ij} [\langle \nabla \Psi^j \circ \Delta^+(\nabla \Psi^i) \rangle + \langle \partial_{xz}^2 \Psi^{ij} \circ \Delta^- \Psi^{ij} \rangle],$$

$$x = \pm 1, \partial_x \Psi^i = \partial_z \Psi^i = 0, t = \theta x; \langle u \circ v \rangle = \langle u, Jv \rangle_{\mathbb{E}_2}, \forall u, v \in \mathbb{E}_2; \quad (2)$$

$$\int_0^{2\pi/l} \int_{-1}^1 \partial_x \Psi^i(x, z) dx dz = 0, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, i \in N;$$

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = \sum_{i=1}^n c_i = 1, c_i \geq 0, p_{ij} \geq 0, \theta^* = \min_{k,l} \{\theta_k(l)\}.$$

Здесь  $\Psi^1, \Psi^2, \dots, \Psi^n, t$  – искомые функции независимых переменных  $(x, z)$ ,  $c_i, p_{ij}$  – коэффициенты уравнений. Краевая задача (1–2) описывает течение слабореоднородной вязкой жидкости. В отличие от постановки Навье-Стокса здесь каждая из проекций скорости  $v_x, v_z$  имеют  $n \geq 2$  компонент.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 08-01-00207-а.

Литература

1. Ларченко В.В. Алгоритмизация вычислений на симплектическом базисе // Диф. уравнения. 2007. Т. 43, №3. С. 411–422.

## Имитационное моделирование реакции взаимодействующих систем организма на комплекс внешних нагрузок

**Лебединская Е. Н.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

lebelnik\_66@mail.ru

Назначением рассматриваемой имитационной системы моделей является прогнозирование реакции человеческого организма на внешние воздействия, что определило необходимость применения системного подхода для ее построения.

Теоретической базой имитационной модели является теория функциональных систем, разработанная П. К. Анохиным, которая появилась как результат применения системного подхода в физиологических исследованиях.

При построении модели приняты к рассмотрению следующие процессы в организме: дыхание, гемодинамика, температурная регуляция, водно-солевой и энергетический обмен, кровеобразование.

Для построения модели сложной саморегулирующейся системы предложен подход, включающий следующие этапы:

1. Построение схемы прямых взаимосвязей между показателями внутренней среды организма, участвующих в формировании гомеостатических показателей, и связей между параметрами внутренней и внешней среды. Рассматривались такие гомеостатические показатели, как артериальное давление, концентрация эритроцитов в артериальной крови, концентрация кислорода и углекислого газа в артериальной крови, рН артериальной крови, осмотическое давление артериальной крови, объем массы крови, температура тела. Изменения вектора состояния системы происходят под влиянием внешних и внутренних воздействий. Рассматривается влияние атмосферного давления, температуры и влажности воздуха, интенсивности физических нагрузок, концентрации кислорода и углекислого газа во вдыхаемом воздухе, рациона питания.
2. Определение функциональных зависимостей между связанными показателями, что позволило построить модель, отражающую цепь изменений в организме, вызванную воздействием внешних факторов и стимулирующих адаптивную реакцию. Большинство моделей системы представляют собой конечно-разностные уравнения, построенные на балансовых соотношениях.
3. Построение модели регуляции, определившей второй уровень связей между показателями внутренней среды. Были определены показатели, посредством изменения которых регуляторная система может управлять состоянием внутренней среды (частота сердечных сокращений, сократительная способность сердца, общее периферическое сопротивление, частота и глубина дыхания и т. д.), называемые в дальнейшем манипуляторами.

Поскольку вектор внешних воздействий на момент времени  $t$  известен, саморегуляция организма осуществляется посредством изменения вектора манипуляторов. Основной целью центральных регулирующих органов является сохранение жизнеспособности организма, т. е. поддержание всех его показателей в

пределах, обеспечивающих нормальный метаболизм. Регуляторные механизмы обеспечивают нахождение компромисса между потребностями различных физиологических систем по поддержанию в допустимых пределах основных гомеостатических показателей.

Вследствие большой взаимозаменяемости систем для достижения одного и того же полезного приспособительного результата таких компромиссов существует множество. Очевидно, что организм ищет лучший среди возможных вариантов в смысле минимальности ущерба для функционального состояния организма и его энергетических ресурсов.

Исходя из вышесказанного, выбор вектора манипуляторов на каждом шаге осуществляется из соображений минимизации суммарного отклонения основных показателей внутренней среды организма от допустимых интервалов их изменения, причем в случае невозможности достижения всеми показателями интервалов их допустимых значений приоритет отдается компенсации отклонения наиболее жизненно важного показателя. Выбор вектора манипуляторов осуществляется в блоке саморегуляции, куда поступают сигналы об отклонении показателей от границ их допустимых значений. Блок саморегуляции занимает верхний уровень в иерархии рассматриваемой имитационной системы. В него поступает информация о состоянии системы и определяется стратегия ее поведения, компенсирующая отклонения, вызванные внешним воздействием. Реакция системы в целом на внешнюю нагрузку зависит от выбора вектора манипуляторов, который осуществляется в этом блоке. При построении основного уравнения саморегуляции большое внимание уделялось минимизации функции энергозатрат при выборе стратегии регуляции.

Оптимальность энергетических затрат различных подсистем становится особенно актуальной в условиях большой нагрузки, когда организм начинает испытывать дефицит кислородных и энергетических ресурсов.

Принятая гипотеза о нахождении наилучшего компромисса позволяет построить модель для определения адаптационной реакции организма на внешнюю нагрузку.

## Математическое моделирование массообмена в корне растения

**Логвенков С. А., Штейн А. А., Юдина Е. Н.**

*Москва, Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова*

stein.msu@bk.ru

Проблема установления механизмов закачки жидкости с растворенными в ней солями из окружающей корень среды (почвы, питательного раствора) в сосуды ксилемы до сих пор остается не в полной мере решенной. Не стихают споры, достаточны ли для организации наблюдаемых процессов бесспорно присутствующие в тканях корня физические явления — активный транспорт ионов и осмотическое перемещение воды из внеклеточного во внутриклеточное пространство. Рассматриваются как различные типы пространственного распределения параметров, отвечающих за их реализацию, так и дополнительные механизмы,

зачастую фантастические. Достоверные оценки могут быть получены только с использованием адекватных математических моделей. Вместе с тем обычно используемые модели, представляющие ткани корня, расположенные между внешней средой и ксилемой, в виде системы мембран, игнорируют реальную геометрию системы и не достаточны для убедительных выводов.

При моделировании растительных тканей мы рассматриваем среду как совокупность трех фаз — твердой, соответствующей материалу клеточных стенок, и двух жидких, отождествляемых с внутриклеточной и внеклеточной жидкостями. Массообмен между жидкими фазами регулируется соотношениями на разделяющих внутриклеточное и внеклеточное пространство мембранах, хорошо проницаемых для воды, плохо проницаемых для растворенных в воде ионов и содержащих ионные насосы, обеспечивающие регулируемый перенос ионов через мембрану. В чисто транспортных задачах твердую фазу можно считать недеформируемой и рассматривать движение двухфазной жидкости через жесткий пористый каркас.

В рамках такой модели поставлена и решается задача об осесимметричном (вообще говоря, нестационарном) течении жидкости между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями, отождествляемыми с границами внешней среды и сосудов ксилемы. Исследовались различные гипотезы о расположении ионных насосов, распределении проницаемости клеточной мембраны для солей и организации течения во внеклеточной среде (в частности, рассмотрен случай присутствия локализованного барьера для перемещения внеклеточной фазы). Расчеты проводились как численно, так и с использованием асимптотических методов. Использовались различные граничные условия, соответствующие разным режимам течения через корень как в целом растении, так и в экспериментах со срезанными корнями. При оценках использовались известные из литературы данные экспериментов и измерений.

В результате анализа полученных результатов показано, что сочетание активного транспорта солей с осмотическим переносом жидкости эффективно обеспечивает транспорт раствора и учет этих процессов достаточен для описания имеющихся опытных данных. Вместе с тем, при реализации такого механизма оказывается необходимым выполнение ряда условий: сильная радиальная неоднородность интенсивности активного транспорта и проницаемости клеточных мембран для солей, а также присутствие непроницаемого (или слабо проницаемого) барьера во внеклеточной фазе, отделяющего внутренние ткани от внешних. Имеются анатомические данные, свидетельствующие в пользу реализации этих условий в реальном корне.

Работа поддержана РФФИ (проект № 08-01-00492) и Государственной программой поддержки ведущих научных школ (проект № НШ-1792.2008.1).

## О моделировании преобразователей на основе флексоэлектрического эффекта

**Лупейко Т. Г.\*, Соловьев А. Н.\*\***

*\*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*\*\*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет  
soloviev@math.rsu.ru*

Бурно развивающиеся нанотехнологии и разработка преобразователей энергии на основе наноразмерных конструкций возобновили интерес исследователей к описанию диэлектрических материалов, в том числе изотропных, на основе учета градиентов поляризации и деформации. Одним из свойств таких материалов является флексоэлектрический эффект. В работе на основе модифицированной теории пьезоэлектричества Тупина и Миндлина построены модели двумерных и трехмерных конструкций и рассмотрено их статическое и динамическое поведения при электрических и механических возбуждениях. Разработана программа в среде FlexPDE и проведены расчеты некоторых конструкций, которые проявили качественное совпадение с известными в литературе данными экспериментов с располяризованной керамикой.

## Моделирование больших деформаций с использованием конечно-элементных пакетов

**Майорова О. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет  
ol\_mayorova@mail.ru*

Задача выбора модели материала и определения ее параметров по экспериментальным данным является актуальной проблемой механики и биомеханики.

Данная задача является так называемой обратной задачей. Очевидно, что для ее решения необходимы средства эффективного решения прямой задачи, т. е. для определения модели материала и ее параметров по экспериментальным данным необходимо изначально построить модель эксперимента по заданной модели материала. Одним из широко используемых сейчас на практике средств для этого является метод конечных элементов. Однако все представленные на данный момент конечно-элементные пакеты содержат ограниченный набор нелинейно-упругого поведения моделей, что делает невозможным получение искомого решения поставленной задачи для произвольно широкого класса материалов.

Целью представленной работы является построение модели эксперимента по определению характеристик нелинейно-упругого поведения в различных конечно-элементных пакетах.

Рассмотрены две постановки нелинейной задачи об осевом растяжении прямоугольника. В среде Maple разработана программа, позволяющая находить аналитическое решение в случае аффинной деформации, вызванной распределенной по торцам нагрузкой, для любой модели материала. Численное решение задачи о

деформации прямоугольника, жестко заземленного по нижнему основанию, выполнено в средах конечно-элементного анализа FlexPDE и Ansys. В силу принципа Сен-Венана результаты, полученные на достаточном удалении от торцов в среде Maple и конечно-элементных пакетах FlexPDE и Ansys, должны совпадать, что может служить проверкой конечно-элементного анализа.

Для различных форм образца построены графики зависимости силы от удлинения. Проведен сравнительный анализ решений, полученных в Maple, FlexPDE и Ansys. Дано сравнение скоростных возможностей конечно-элементных пакетов FlexPDE и Ansys.

## Математическое моделирование вибрационных потоков жидкости в костных тканях опорно-двигательного аппарата

**Маслов Л. Б.**

*Иваново, Ивановский государственный энергетический университет*  
leonid-maslov@mail.ru

Закон функциональной адаптации костной ткани к меняющимся внешним силовым условиям, известный как закон Вольфа [1], является основополагающей гипотезой различных теорий костной перестройки. Ключевым нераскрытым фактором к пониманию механобиологических процессов костной перестройки остается вопрос, как специфические клетки кости, ответственные за формирование новой ткани, воспринимают механический стимул и реагируют на него, чтобы привести физиологическое состояние костного вещества в соответствие изменившимися внешним условиям. Поскольку основная масса костных клеток располагается на стенках каналцев и поверхностях лагун, входящих в систему микропор кости, то предполагается, что возмущения, вносимые внешней механической нагрузкой в установившееся движение жидкости в транспортной системе кости могут обеспечивать передачу управляющих сигналов между клетками кости в процессе ее функциональной адаптации.

В работе представлена математическая модель костной ткани, описываемая динамическими уравнениями теории эффективной пороупругости и определяющими уравнениями анизотропной сплошной среды. Для численного анализа использована модель «перемещения упругого каркаса – давление в порах» и разработана конечно-элементная модель большеберцовой кости голени человека. Проведен расчет вынужденных гармонических колебаний модели кости и исследовано распределение давления в порах компактного и губчатого вещества. Показано, что вибрационные потоки жидкости в системе пор костной ткани зависят от частоты возбуждения и могут достигать существенных значений в случае резонансных форм колебаний. Проведено сравнение результатов гармонического пороупругого анализа с решением в постановке классической теории упругости с использованием эффективных модулей в дренированном и недренированном состояниях и отмечено, что отличия в результатах могут достигать 5..10% на определенных модах колебаний.

Полученные результаты могут служить теоретическим фундаментом для разработки вибрационных методов реабилитации и контроля физиологического состояния костной ткани спортсменов, пожилых и перенесших травмы людей.

#### Литература

1. *Wolff J.* Das Gesetz der Transformation der Knochen. Berlin: A. Hirschwild (1892). Translated as: The Law of Bone Remodeling. Edited by P. Maquet and R. Furlong. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

### Моделирование течений вязкой жидкости асимптотическими и численными методами

**Мелехов А. П., Ревина С. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
melekhov@math.rsu.ru

Целью работы является моделирование пространственно-периодических стационарных и периодических по времени течений жидкости асимптотическими и численными методами.

Исследована устойчивость относительно длинноволновых возмущений двумерных стационарных пространственно-периодических течений, близких к параллельным. Показано, что при уменьшении параметра вязкости происходит бифуркация рождения цикла: от основного стационарного решения ответвляется автоколебательный режим.

Для течений общего вида явно найдены первые члены асимптотики вторичных течений. Для построения асимптотики применяется метод Ляпунова-Шмидта, развитый В. И. Юдовичем, в той форме, которая является общей как для двумерных, так и для трехмерных течений, что позволяет легко обобщить полученные результаты на трехмерный случай.

Для исследования движения частиц во вторичных течениях создан комплекс программ, с развитым интерфейсом, позволяющий проводить численные эксперименты. Были, в частности, реализованы численные методы поиска спектра Фурье, вычисления показателей Ляпунова, построения отображения Пуанкаре.

Исследовано поведение частиц жидкости (пассивной примеси) в основном течении, а также, с помощью построенных асимптотик, во вторичных потоках. Показано, что для вторичных течений возможны два типа траекторий: регулярные и хаотические. Наличие хаотических траекторий свидетельствует о том, что имеет место лагранжева турбулентность. Проведенные компьютерные эксперименты свидетельствуют о том, что качественное поведение частиц жидкости (пассивной примеси) не зависит от конкретного вида течения и от размерности пространства.

## Переломы Коллиса. Аспекты консервативного лечения

Меркулов А. М.\*, Тарасевич Т. Ю.\*\*

\* Астрахань, МУЗ ГП №3

\*\* Красноярск, Красноярский государственный медицинский университет  
tarasevich\_tania@mail.ru

Перелом дистального конца лучевой кости в типичном месте, описанный ирландским хирургом А. Colles в 1814 году, самый частый среди переломов костей предплечья.

Известно, что эти переломы легко вправляются, но сохранить репозиционное положение отломков до момента консолидации удается не всегда, тем более при оскольчатых повреждениях. Ухудшение положения отломков после вправления отмечено более чем у 60% пострадавших.

Цель данной работы — выявить причины возникновения значительного количества вторичных смещений и обосновать нашу позицию по стабилизации репозированного перелома гипсовой повязкой в положении разгибания запястья и тем самым уменьшить количество повторных вправлений и осложнений.

Методика закрытой репозиции переломов Коллиса общеизвестна и исчерпывающе изложена в многочисленных популярных руководствах по травматологии (В. В. Гориневской, А. В. Канлана, А. А. Коржа). На наш взгляд, фиксация кисти в ладонном положении не только функционально не выгодна и опасна для окружающих перелом мягких тканей, но, что принципиально важно, именно такая фиксация способствует вторичному смещению отломков в гипсовой повязке. И можно лишь удивляться, что не смотря на порочное с биомеханической точки зрения положение кисти в ладонном сгибании при переломе Коллиса, вторичное смещение происходит не в 100% случаев.

Согласно концепции Т. Holdeworth (1940) и Mc. McConaill (1941), рассматривающей кистевой сустав как винтовой механизм, при разгибании кисти происходит замыкание дистального ряда запястья на проксимальном, а проксимального — на предплечье и в итоге наступает ригидность всего комплекса кистевого сустава. В таком положении боковые отклонения кисти ограничиваются, что особенно важно для профилактики вторичного смещения дистального отломка в лучевую сторону, тогда как при сгибании кисти боковые движения её легко осуществляются. Кроме этого, стабилизация кисти достигается мышечно-связочным аппаратом. И именно тыльная стабилизация кисти способствует сгибанию пальцев за счёт расслабления разгибателей и натяжения их сгибателей. Сгибание происходит с максимальной силой и в полном объёме. С. Taylor, R. L. Schwartz (1955) установили, что сила захвата достигает максимальных величин, когда угол тыльного сгибания запястья находится в пределах 30–40°. При нейтральном положении, при волярной флексии или же при тыльном сгибании кисти более чем на 40° сила захвата быстро снижается.

Более целесообразной и физиологичной, на наш взгляд, является фиксация кисти в положении разгибания. В этом положении не только значительно уменьшается вероятность вторичного углового смещения отломков в тыльном направлении, но и создаются условия для углового смещения дистального отломка в



ладонном направлении, т. е. не исключается возможность самодовправления в противоположность вторичному смещению. Это можно назвать «феноменом самокоррекции».

Наши исследования основаны на 236 больных, хорошие результаты достигнуты у 207 больных (88%), неудовлетворительные у 29 (12%).

Таким образом, наше исследование позволяет сделать вывод, что для профилактики вторичного смещения отломков под углом, открытым к тылу, лечение переломов Коллиса гипсовой повязкой в положении разгибания кисти является оптимальным как с биомеханической, так и с физиологической точек зрения.

## Создание информационного портала на основе сайта мехмата

**Михалкович С. С.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

miks@math.rsu.ru

Новый сайт мехмата <http://mmcs.sfedu.ru>, созданный в январе 2009 г., построен по следующим принципам [1]:

- Возможность легкой публикации новостей и событий каждым подразделением, деканом и заместителями декана.
- Различные категории новостей, отображаемые на разных страницах.
- Возможность быстрого создания и обновления страницы (группы страниц) кафедры или лаборатории.
- Наличие легко обновляемого файлового хранилища документов.

Менее чем за полгода своего функционирования сайт мехмата стал постоянно обновляемым источником новостей о факультете. Основными авторами новостей являются декан, заместители декана и заведующие кафедрами. Новости, публикуемые на сайте, можно разделить на следующие категории:

- Новости о предстоящих мероприятиях.
- Отчеты о проведенных мероприятиях.
- Новости о семинарах кафедр.
- Информация, сопровождаемая публикацией документов и ссылками на эти документы (например, информация о сроках и правилах приема в аспирантуру).

Кроме новостей, на сайте появились и наполняются страницы подразделений (кафедр, лабораторий), а также файловый архив, пополняемый общефакультетскими документами.

В процессе функционирования сайта выявлены некоторые недостатки его организации. Кроме этого, появился ряд идей по его совершенствованию, центральной из которых является идея развития сайта как информационного портала. Под информационным порталом будем в данном случае понимать сайт, используемый для получения самой актуальной информации о факультете всеми посетителями сайта, а также активно используемый сотрудниками факультета для размещения и получения необходимой внутренней документации и информации о текущих событиях.

Для реализации идеи превращения сайта мехмата ЮФУ в информационный портал необходимо осуществить следующие шаги:

- Упорядочение категорий новостей, формулировка критериев публикации новостей на главной странице.
- Создание групп пользователей, каждая из которых может редактировать только свою группу страниц.
- Упорядочение структуры файлового архива, отделение его основной части, относительно устойчивой и содержащей документы общего пользования, от остального содержимого. Создание страниц со сводной информацией о важнейших документах, расположенных на сайте.
- Создание страниц общефакультетских лабораторий с новостными колонками.
- Создание страниц постоянно действующих семинаров.

В качестве идей, требующих проверки практикой, предлагается также:

- создать страницу библиотеки с постоянно обновляемыми новостями;
- установить Wiki-систему с целью совместной разработки и правки документов;
- создать настраиваемые профили пользователей.

#### Литература

1. М. И. Карякин, С. С. Михалкович. Основные принципы организации нового сайта мехмата. // Научно-методическая конференция «Современные информационные технологии в образовании: Южный Федеральный округ». Ростов-на-Дону, 2009. Тезисы докладов. С. 156–157.

Моделирование распространения вещества от стационарного источника в мелком потоке вязкой жидкости

**Надолин К. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет  
nadolin@math.rsu.ru*

Рассматривается перенос пассивной примеси от источника вещества мелким широким течением вязкой жидкости. Считается, что русло потока искривлено слабо и задано достаточно гладкой функцией  $z = h(x, y)$ , а форма свободной границы течения неизвестна. Источник примеси предполагается стационарным и расположенным во входном сечении рассматриваемого участка потока. Для математического описания процесса используется редуцированная модель мелкого широкого руслового течения [1]. В главном приближении получаем начально-краевую задачу со стационарной гидродинамической частью, которая имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial cu}{\partial x} + \frac{\partial cv}{\partial y} + \frac{\partial cw}{\partial z} = d_{33} \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - \lambda c, \quad (1)$$

$$c|_{t=0} = c^0(x, y, z), \quad c|_{x=0} = c_0(y, z, t), \quad \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=h} = \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = Fr^{-1} \cos \varphi, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -Re Fr^{-1} \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (2)$$

$$u = v = w|_{z=h} = 0,$$

$$p|_{z=\xi} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = -F_x, \quad \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=\xi} = -F_y$$

$$u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} - w \Big|_{z=\xi} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $c$  – концентрация вещества;  $d_{33}$  – коэффициент турбулентной диффузии;  $\lambda$  – параметр распада вещества;  $u, v, w$  – компоненты вектора скорости в продольном, поперечном и вертикальном направлениях соответственно;  $\nu$  – параметр турбулентной вязкости (в случае постоянной вязкости он равен 1);  $\xi$  – неизвестная функция, определяющая свободную границу потока;  $Re$  – число Рейнольдса;  $Fr$  – число Фруда;  $\varphi$  – уклон русла;  $F_x, F_y$  – параметры внешних нагрузок на поверхности (связанных, например, с воздействием ветра).

Уравнения (1) образуют концентрационную подсистему, а (2), (3) – гидродинамическую, при этом гидродинамическая подсистема решается независимо от концентрационной.

Для стационарного потока постоянной вязкости ( $\nu = 1$ ) в случае, когда поверхностная нагрузка направлена вдоль русла ( $F_y = 0$ ), гидродинамическая подсистема (2), (3) может быть решена аналитически. Формально являясь трехмерной, она распадается на одномерные двухточечные краевые задачи, из которых

компоненты скорости выражаются через функцию  $\xi$ , которая, в свою очередь, определяется из кинематического краевого условия (3).

Анализируя решение, легко получить условие возникновения противотока (нагонного ветрового течения)

$$F_x \leq -\frac{1}{2} (h - \xi) ReFr^{-1} \sin \varphi \quad (4)$$

Очевидно, что у пологих берегов естественных водотоков противотечение будет возникать даже при незначительном встречном ветровом воздействии, поскольку глубина  $(h - \xi)$  в этих местах мала. Для определения концентрации начально-краевая задача (1) решается численно.

Специальной заменой переменных расчетная область приводится к прямоугольной, после чего, применяя метод Галеркина по вертикальной переменной, приходим к задаче Коши для гиперболической линейной системе уравнений первого порядка с симметричной матрицей. При этом поперечная переменная входит в уравнения и как параметр.

Далее применяется алгоритм явного и неявного сеточного метода характеристик, описанный в [2].

Представлены результаты расчетов, проведенных для случая стационарного источника вещества, расположенного во входном сечении рассматриваемого участка потока, что соответствует  $c_0 = const$ .

#### Литература

1. *Надолин К. А.* Моделирование массопереноса в русловых потоках // В кн. Моделирование и вычислительный эксперимент в задачах механики сплошных сред. Т. 1. Ростов-на-Дону: Из-во "ЦВВР", 2006. С. 18–46.
2. *Надолин К. А.* О численном решении начально-краевой задачи для одного параболического в широком смысле уравнения // Изв. вузов. Электромеханика, 2007, Математические методы в физике, технике и экономике. С. 16–25.

Перспективы подготовки магистерской образовательной программы по математическому моделированию и компьютерной механике

**Надолин К. А., Наседкин А. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
nadolin@math.rsu.ru

Приобретение современного программного обеспечения сложных научных и инженерных расчетов (ANSYS, MSC Software, ABAQUS, COMSOL и др.) и высокопроизводительных вычислительных систем (кластеры Т-Платформы) выводит ЮФУ в число немногих университетов мира, обладающих подобными ресурсами.

Рассматривая перспективы создания магистерской образовательной программы по математическому моделированию и компьютерной механике на английском языке, удовлетворяющей международным (в первую очередь — европейским) образовательным стандартам, следует определить целевые группы обучаемых и шкалы их мотиваций.

Нам представляется, что среди потенциальных студентов-потребителей такой программы можно выделить две группы. Первую группу составляют иностранные студенты со скромным достатком, например, из стран с развивающейся экономикой. Для таких студентов привлекательность обучения в России связана, во-первых, с относительной дешевизной и, во-вторых, с высоким уровнем профессиональной подготовки, который обеспечивается на механико-математических факультетах ведущих университетов России, к которым относится и ЮФУ. Вторую группу составляют российские студенты, ориентированные на профессиональную карьеру за рубежом, в филиалах и дочерних предприятиях транснациональных корпораций с высокотехнологичным производством, а также в отечественных научно-производственных объединениях, имеющих развитые связи с зарубежными партнерами. Для таких студентов привлекательность англоязычной образовательной программы, отвечающей международным стандартам, может быть связана с получением диплома, узнаваемого на международном рынке труда, а также с дополнительными возможностями изучения иностранного языка.

В любом случае выдача диплома, который бы имел международное признание, является важнейшим условием для привлечения на разрабатываемую магистерскую программу как российских, так и зарубежных студентов. Существуют различные пути достижения этой цели. Прежде всего, это международная аккредитация образовательных программ. Более подходящим путем является присуждение двойных дипломов. Такая схема может быть реализована на уровне университетов-партнеров без привлечения сторонних организаций.

Оценивая перспективы международного сотрудничества при разработке рассматриваемой магистерской программы, следует отметить давние партнерские отношения, установленные с физико-математическим отделением Технического Университета г. Лаппеенранта (Финляндия) и с факультетом прикладной математики Университета Твенте (Нидерланды). Мы считаем, что целесообразно разрабатывать международную магистерскую образовательную программу по математическому моделированию и компьютерной механике с учетом накопленного в указанных вузах опыта. В обоих университетах существуют магистерские программы, близкие по содержанию: программа по техноматематике в Техническом Университете г. Лаппеенранта и программа по прикладной математике (специализация математическая физика и вычислительная механика) в Университете Твенте.

## Использование конечноэлементных пакетов в преподавании естественнонаучных и технических дисциплин

**Напрасников В. В.\* , Скалиух А. С.\*\***

*\* Минск, Беларусь, Белорусский национальный технический университет*

*\*\* Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*soloviev@math.rsu.ru*

Ряд естественно научных и технических дисциплин («Математические модели естественных наук», «Вычислительная механика» и др.), которые преподаются в классических и технических университетах, связаны с решением начально-краевых и краевых задач. В течение ряда последних лет авторами доклада успешно применяются в этих курсах конечноэлементные пакеты (ACELAN, ANSYS, FlexPDE и др.) Отметим в связи с этим, что основные цели курсов смещаются в сторону выработки навыков постановок задач, т. к. для большого круга линейных моделей численное решение с использованием КЭ пакетов легко реализуемо. В недавнем прошлом приходилось подробно изучать методы, позволяющие упрощать постановку задачи, а иногда использовать лишь одномерные модели с целью получения их аналитического решения. Доступность численного решения с заданной степенью точности позволяет опускать методы решения задач, а высвободившееся время использовать для анализа полученных решений.

## Математическое моделирование пьезокомпозиционных материалов и пьезоэлектрических устройств мощного ультразвука для биомедицинских применений

**Наседкин А. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*nasedkin@math.rsu.ru*

Композитные пьезокерамические материалы в последние годы привлекают все большее внимание для использования в ультразвуковых пьезопреобразователях. Например, основным преимуществом пористых пьезокомпозитивов по сравнению с обычной плотной пьезокерамикой являются их низкий акустический импеданс и высокая эффективность по ряду параметров. В большом числе практических применений пористые пьезокерамические материалы могут рассматриваться как однородные с эффективными модулями.

В первой части работы для моделирования пористых и поликристаллических материалов развивается подход, основанный на методах эффективных модулей, моделировании представительных объемов и применении конечно-элементных технологий. Рассмотрены теоретические аспекты метода эффективных модулей для неоднородных пьезоэлектрических сред. Выделены четыре статические задачи электроупругости для представительного объема, позволяющие находить эффективные модули неоднородного пьезоэлектрического тела. Данные задачи различаются граничными условиями на поверхности представительного объема.

Для этих задач указаны определенные виды граничных условий, позволяющие по удобным формулам вычислить полный набор эффективных модулей электроупругой среды с произвольным классом анизотропии. Обсуждены результаты расчетов по методу конечных элементов эффективных модулей для различных вариантов представительных объемов, в том числе модели кластерного типа 3-0-3-3 и 3-3 связностей. Разработанная модель 3-3 связности кластерного типа оказалась пригодной для исследования сильно пористых структур. Проведенные вычислительные эксперименты позволяют рекомендовать модель 3-3 связности для расчета эффективных свойств пористых пьезокомпозитов в широком диапазоне изменения пористости. В качестве усложнения предложенных моделей было рассмотрено предположение о неравномерной поляризации пьезокерамического материала с порами. Были исследованы структуры пьезокерамики с неполяризованными элементами, со «сверхполяризованными» элементами и с элементами-порами. Аналогичные исследования были проведены также для поликристаллических пьезокомпозитных материалов.

Во второй части работы рассматриваются вопросы конечно-элементного моделирования пьезоэлектрических устройств мощного ультразвука, в том числе выполненных из пьезокомпозиционных материалов. Рассмотрены антенные решетки и фокусирующие сферические пьезоизлучатели из пористой пьезокерамики, нагруженные на жидкую среду. С использованием конечно-элементной техники определены рабочие частоты электрического резонанса и антирезонанса, вычислены амплитудно-частотные характеристики свободных и нагруженных пьезоизлучателей, диаграммы направленности, определены фокальные зоны при нагрузке на акустическую среду на резонансной частоте и при нестационарных импульсных воздействиях. Отмечены проблемы, связанные с конкретными применениями рассмотренных устройств в биомедицинских приложениях.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты 08-01-00828, 09-01-00875).

### Конечно-элементное моделирование неоднородного пороупругого цилиндрического слоя с кольцевой внутренней трещиной при нестационарном воздействии

**Наседкина А. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
 nasedkina@math.rsu.ru

Рассмотрена задача механики разрушения для неоднородного цилиндрического слоя с кольцевой внутренней трещиной. Математическая модель формулируется с позиции теории пороупругости в осесимметричной постановке. Цилиндрический слой рассматривается как двухфазная пористая среда, состоящая из твердой фазы скелета и жидкой фазы фильтрующегося в порах флюида. Проводится связанный нестационарный анализ для твердой и жидкой фаз, то есть совместное решение уравнений деформации пористого тела и фильтрации

жидкости по закону Дарси в пористой среде. Цилиндрический слой состоит из трех материалов, имеющих различные механические и фильтрационные свойства. Один из материалов характеризуется нелинейной зависимостью коэффициентов фильтрации от порового давления, что делает модель существенно нелинейной.

Численное решение нелинейной нестационарной задачи пороупругости осуществляется с помощью техники метода конечных элементов, реализованной в пакете ANSYS. Для моделирования сингулярности напряжений в окрестности вершины трещины при построении конечно-элементной сетки используется сдвиг узлов на четверть длины стороны для элементов, окружающих вершину трещины. Аналогия между уравнениями для пороупругих и термоупругих сред позволяет применить к данной задаче стандартные модули ANSYS для решения задач термоупругости. Для улучшения сходимости итерационного решения в ANSYS по методу Ньютона-Рафсона систем нелинейных уравнений метода конечных элементов на каждом временном слое расчеты проводились в безразмерных переменных. В качестве критерия разрушения рассматривался инвариантный энергетический интеграл (J-интеграл), по которому затем были рассчитаны коэффициенты интенсивности напряжений. Для вычисления J-интеграла был написан специальный макрос.

Результаты расчетов позволяют получить картины распределения порового давления, перемещений, деформаций и напряжений в цилиндрическом слое, определить значения функции порового давления в различные моменты времени и в различных точках расчетной области, провести анализ концентрации напряжений и распространения трещины.

В качестве входных данных для цилиндрического слоя были взяты параметры трехслойного угольного пласта вблизи одной из скважин Краснодонского месторождения Донбасского бассейна с трещиной в угольном слое. На основе анализа распределения давления и концентрации напряжений было определено влияние трещины на величину зоны дегазации.

## Исследование устойчивых режимов работы некоторых электромеханических систем

**Нефедов В. В.**

*Новочеркасск, ЮРГТУ (НПИ)*

*soloviev@math.rsu.ru*

В работе исследуются различные режимы работы промышленного робота с числовым программным управлением модели М20П.40.01, предназначенного для автоматизации загрузки-выгрузки деталей и смен инструмента на металлорежущих станках с ЧПУ. Робот может обслуживать один или два станка, образуя с ними комплекс (станок-робот), который является базой для создания станкомодулей, предназначенных для продолжительной работы без участия оператора.

Каждые пары звеньев связаны между собой вязкоупругими элементами. На кинематические пары подаются управляющие воздействия стремящиеся переместить груз из одной точки пространства в другую.



Математическая модель робота составляется на основе уравнений Лагранжа II рода с учётом жёсткости некоторых звеньев.

При анализе устойчивости стационарных состояний установлено, что при заданных габаритах робота стационарные состояния устойчивы, а поэтому можем считать, что звено абсолютно жёсткое и сократить количество координат до 3-х.

Исследование установившегося режима работы робота-манипулятора проводится на основе уравнений возмущённого движения.

В результате исследования получено, что при движении с постоянной скоростью движение вдоль траектории устойчиво; при движении с ускорением неустойчивость возникает в фазе разгона; при увеличении вязкости зона устойчивости расширяется.

## Методика предоперационного прогнозирования состояния левого желудочка сердца

**Оганисян М. Ю.**

*Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет  
smu\_r@mail.ru*

В работе рассмотрены вопросы, связанные с важной диагностической проблемой в кардиологии — оценкой критического состояния левого желудочка (ЛЖ) с постинфарктными осложнениями: локальными участками некроза мышечной ткани, разрывами стенки миокарда и аневризматическими образованиями.

Сердечно-сосудистые заболевания являются причиной более 55% всех случаев смерти в России. Не снижающиеся показатели сердечно-сосудистой заболеваемости определяют социально-экономическую значимость этой проблемы.

Образование постинфарктной аневризмы ЛЖ связано с выраженным изменением геометрии ЛЖ, увеличением его объемов, массы миокарда, нарушением насосной функции ЛЖ, то есть изменением всех параметров, характеризующих желудочковое ремоделирование. Единственный путь предотвращения развития аневризмы до критического состояния, приводящего к смертельному исходу — хирургическое вмешательство. Показания к операции до настоящего времени носят качественный характер, так как не разработаны методики предоперационного прогнозирования. Биомеханический анализ напряженно-деформированного состояния ЛЖ при патологии и коррекции является важнейшей составляющей этого прогноза.

На основе компьютерных клинических данных разработан биомеханический метод расчета напряжений в стенке ЛЖ в норме и при различных патологиях.

Исследовано влияние модуля нормальной упругости миокарда, толщины стенки ЛЖ, диаметра, толщины и модуля нормальной упругости некротизированного участка стенки ЛЖ, глубины и уловного диаметра разрыва стенки ЛЖ, модуля нормальной упругости, толщины и радиуса аневризмы ЛЖ, места расположения разрыва, некротизированного участка и аневризмы ЛЖ на экстремальное значение напряжения в стенке ЛЖ.

Разработанная интегральная компьютерная технология исследования и анализа состояния ЛЖ сердца, представляющая симбиоз биомеханического и клинического исследований, позволяет проводить предоперационное прогнозирование критического состояния ЛЖ с постинфарктными осложнениями.

Построена модель левого и правого желудочков сердца при использовании программы *mimics*. Данная программа позволяет максимально точно создать компьютерную 3D модель на основе томограмм. Построенная модель будет использована для исследования гемодинамических характеристик сердца и проведения предоперационного прогнозирования.

## Колебания и волны цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией

**Панфилов И. А., Устинов Ю. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
ustinov@math.rsu.ru

Настоящая работа посвящена исследованию гармонических колебаний и волн в цилиндрической оболочке с винтовой анизотропией на основе прикладной теории типа Кирхгофа-Лява [2]. Такой анизотропией обладают стенки артериальные сосуды мышечного типа [1], [3]. В случае осесимметричных колебаний получено дисперсионное уравнение, исследованы поведения его корней и отвечающих им элементарных решений в зависимости от параметров задачи. В частности, показано, что все волновые процессы в оболочке определяют четыре однородных и четыре неоднородных волны. В отличие от ортотропной анизотропии, когда существуют два основных типа колебаний: продольно-радиальные и крутильные, при винтовой анизотропии происходит взаимодействие этих типов колебаний и волновые процессы приобретают характер квазипродольных и квазикрутильных. Классификации и математического описание этих волн осуществляется на основе «амплитудных коэффициентов»

$$k_z = \frac{U_z}{U}, \quad (1)$$

где  $\vec{U} = (\dots)^T$  — амплитуда однородной волны.

С использованием элементарных решений исследованы собственные и вынужденные колебания оболочки конечной длины. Для исследования собственных колебаний выбрана оболочка, на краях которой задаются условия с жесткой заделки. Для анализа характера колебаний построены зависимости двух собственных частот от безразмерной длины  $l$  и угла наклона винтовых линий  $\alpha$ .

Вынужденные колебания исследуются в случае, когда на одном торце задаются осевые смещения, изменяющиеся по гармоническому закону, а второй торец свободен от усилий и моментов. На основе проведенной серии расчетов показано, как в зависимости от параметров продольные колебания на одном торце преобразуются в продольно-крутильные на другом. В частности установлено, что при

выбранных механических и геометрических параметров на отрезке  $\alpha[0..90^\circ]$  оболочка имеет два резонанса.

Кроме осесимметричных исследованы изгибные колебания цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией. На основе метода однородных решений показано, что в случае винтовой анизотропии изгибные колебания определяются шестнадцатью элементарными решениями, четыре из которых являются однородными волнами, а остальные — неоднородными. Для классификации однородных волн используется энергетический принцип Мандельштама [4]. Следует заметить, что в случае ортотропной оболочки аналогичные колебания определяют восемь элементарных решений. Выбор необходимых элементарных решений для построения решений иллюстрируется на конкретных задачах.

1) Исследуется распространение гармонических волн в полубесконечной оболочке ( $z \geq 0$ ) при кинематическом возбуждении ее торца. Торец оболочки  $z = 0$  совершает гармонические колебания в плоскости  $Ox_1x_3$ . Как показывают расчеты, при  $z \neq 0$  центр оболочки в общем случае совершает колебания в двух плоскостях  $Ox_1x_3$ ,  $Ox_2x_3$ , что является следствием винтовой анизотропии.

2) Задача отражения гармонических однородных волн от торца полубесконечной оболочки  $z \geq 0$ . Показано, что при некоторых значениях  $\alpha^*$  (для выбранной оболочки и  $\alpha^* \simeq 30^\circ$  и  $\alpha^* \simeq 87^\circ$ ) на торце амплитуда отраженной однородной волны оказывается равной нулю и характер колебаний в окрестности торца определяется неоднородными волнами, амплитуды которых экспоненциально убывают. Из этого следует, что при указанных значениях  $\alpha$  имеет место краевой резонанс [5].

#### Литература

1. Устинов Ю. А. Модель винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах // Докл. РАН. 2004. Т. 398. № 3. СС. 344–348.
2. Устинов Ю. А. Некоторые задачи для тел с винтовой анизотропией // Успехи механики, октябрь-декабрь 2003 г. СС. 37–62.
3. Пуриня В. А., Касьянов В. А. Биомеханика крупных кровеносных сосудов // Рига: Знание. 1980. 260 с.
4. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: 1972. 437 с.
5. Гринченко В. Т., Мелешко И. И. Гармонические колебания и волны в упругих телах. К.: Наук. думка, 1981. 284 с.

## Неустойчивость двухслойной цилиндрической оболочки с внутренними напряжениями

**Попов А. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*a\_v\_popov@mail.ru*

Исследуется вопрос потери устойчивости двухслойной цилиндрической оболочки. Каждый слой представляет собой полый круговой цилиндр. Исследуемая оболочка получается, если один из цилиндров вставить в другой, причём в исходном, ненапряжённом состоянии внешний радиус внутреннего слоя больше внутреннего радиуса внешнего слоя (в технике такой способ называется посадкой с натягом). В результате в образованном составном теле возникают начальные напряжения. Задача состоит в том, чтобы выяснить влияние этих напряжений на величины критических значений прилагаемых нагрузок: внешнего равномерно распределённого давления и осевого сжатия.

Постановка задачи выполнена в рамках пространственной теории упругости, для решения используется модель изотропного несжимаемого материала. Выводятся уравнения нейтрального равновесия, линеаризованные граничные условия и условия сопряжения на границе раздела слоев. Невозмущенное состояние равновесия определяется на основе точного решения нелинейной задачи Ламе для двухслойной цилиндрической оболочки. Рассматривается один из классов решений уравнений нейтрального равновесия, для которого задача устойчивости сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе численного решения полученной системы находятся критические значения внешних нагрузок.

## Напряженно-деформированное состояние цилиндра с винтовой дислокацией при учете структуры материала

**Пустовалова О. Г.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*olga-pustovalova@yandex.ru*

Одной из важных задач физики дислокаций является моделирование процессов, протекающих в ядре дефекта — области, близкой к его оси, — а также выяснение структуры этой области. Используемые для такого моделирования методы молекулярной динамики показали, в частности, что одним из вариантов этой структуры может быть полость.

С точки зрения теории упругости ядро дефекта представляет собой область высокой концентрации напряжений. Это означает, что при ее анализе важен учет микроструктуры материала. Другим фактором, свидетельствующим об актуальности учета микроструктуры в теории упругих дислокаций, является использование этой теории при описании нано-объектов. Одним из распространенных способов учета структуры материала в рамках континуальной механики является использование модели сплошной среды с моментными напряжениями, или

среды Коссера. Возможность описания порообразования на оси дислокации в рамках континуального подхода на основе нелинейной теории упругости была впервые продемонстрирована М. И. Карякиным (1988).

В работе рассмотрены задачи о равновесии нелинейно-упругого цилиндра с винтовой дислокацией в рамках механики псевдоконтинуума Коссера для потенциала вида

$$W = \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr}^2 \mathbf{E} + \frac{\mu + \alpha}{2} \operatorname{tr} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^T) + \frac{\mu - \alpha}{2} \operatorname{tr} \mathbf{E}^2 + \frac{\delta}{2} \operatorname{tr}^2 \mathbf{L} + \\ + \frac{\gamma + \eta}{2} \operatorname{tr} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T) + \frac{\gamma - \eta}{2} \operatorname{tr} \mathbf{L}^2,$$

Для получения уравнения для определения радиуса полости находились стационарные точки полной потенциальной энергии деформации, рассматриваемой как функция радиуса потенциальной полости  $A$

$$\frac{d\Pi}{dA} = 2\pi \int_0^{r_1} \left[ \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{Y}} \odot \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial A} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{L}} \odot \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial A} \right] r dr = 0.$$

В работе показано, что влияние учета моментных напряжений на порообразование вокруг оси винтовой дислокации не является однозначным. В частности, было показано, что учет моментных напряжений при различных материальных параметрах может приводить как к уменьшению, так и увеличению радиуса полости. Это же относится и к энергии цилиндра с дислокацией. В области достаточно малых значений параметра дислокации существуют интервалы, в которых разрывное решение хотя и существует, но энергетически невыгодно. При увеличении параметра дислокации энергетическая предпочтительность разрывного решения восстанавливается.

Изучение напряженно-деформированного состояния с учетом микроструктуры показало, что учет микроструктуры материала в рамках континуума Коссера приводит к устранению сингулярностей некоторых полей напряжений на оси дефекта.

#### Литература

1. Еремеев В. А., Зубов Л. М., Карякин М. И., Чернега Н. Я. Образование полостей в нелинейно-упругих телах с дислокациями и дисклинациями // Докл. РАН. 1992. Т. 326, № 6. С. 968–971.
2. Карякин М. И., Пустовалова О. Г. О кавитации на оси клиновой дисклинации в нелинейно-упругом цилиндре // Вестник Южного Научного Центра РАН. 2008. Т. 4. № 1. С. 16–23.
3. Койтер В. Т. Моментные напряжения в теории упругости // Механика. Сб. перев. 1965. № 3(91). С. 89–112.

## Об одной трехмерной модели поликристаллических сегнетоэлектриков-сегнетоэластиков

**Скалиух А. С.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
skaliukh@math.rsu.ru

Предметом моделирования являются определяющие соотношения напряжения – деформации в поликристаллических сегнетоэластических средах. В частности, исследуется деформированное состояние при однородных напряжениях в материалах, относящихся одновременно к сегнетоэлектрическим и сегнетоэластическим классам. Практическое использование таких материалов связано с созданием датчиков больших деформаций. Их моделирование основано на решении конкретных задач и базируется на использовании численных пакетов конечных элементов. При этом необходимо использовать эффективные модели определяющих соотношений, т. е. модели деформационного отклика на приложенные механические напряжения в трехмерном случае. В настоящее время уже имеются некоторые одномерные модели такого поведения, но обобщение их на трехмерный случай вызывает определенные трудности, как в физическом, так и математическом плане. Представленная модель является именно таким обобщением известной одномерной модели Джилла–Атертона на трехмерный случай. В основу модели положена предельная зависимость Ланжевена и некоторое энергетическое соотношение, позволившие получить связь между деформациями и напряжениями в виде уравнений в частных производных первого порядка, которые сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Если поле напряжений задано, то удастся получить приращение поля деформаций. Полученные соотношения описываются гистерезисными операторами. Созданы рабочие программы, позволяющие находить все компоненты деформаций при заданных напряжениях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 08-01-00828-а).

## Актуальные модели механики крупных кровеносных сосудов

**Соколов А. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*  
arcady\_sokolov@mail.ru

Проведен сравнительный анализ моделей, используемых для описания механического поведения стенок крупных кровеносных сосудов. Рассмотрены особенности их применения в задачах математического моделирования деформационных свойств ткани кровеносных сосудов. Данный обзор включает в себя широкий набор уравнений состояния для описания поведения крупных кровеносных сосудов. Это связано как со сложностью моделируемого объекта, так и относительно недолгой историей развития этого раздела биомеханики. Общим

для них является нелинейность и анизотропия. Нужно отметить, что в рассматриваемых моделях не учитываются электрические процессы, а также процессы переноса, играющие заметную роль в функционировании биообъектов.

## Методика моделирования технических систем в виде недетерминированного конечного автомата

**Тарасова И. Л.**

*Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН*

til@msa2.ipme.ru

Конечный автомат в теории алгоритмов — это математическая абстракция, позволяющая описывать пути изменения состояния объекта в зависимости от его текущего состояния и входных данных, при условии, что общее возможное количество состояний конечно [1]. Конечные автоматы широко используются на практике, например в синтаксических, лексических анализаторах, и тестировании программного обеспечения на основе моделей. Более того, в основе любой вычислительной машины лежат автоматические системы дискретного действия для переработки информации, которые можно отнести к классу конечных автоматов.

В наиболее общей форме конечные автоматы (КА) в соответствии с [2] можно рассматривать как динамические системы логического типа. При этом математическую модель произвольной логической системы можно представить в виде системы :

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Ax(t) \oplus Bu(t) \oplus Fz(t) \oplus r \\y(t) &= Gx(t) \oplus Du(t) \oplus Hz(t) \oplus s \\z(t) &= K \& x(t) \oplus q\end{aligned}\tag{1}$$

где:  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $u(t)$ ,  $z(t)$  — двоичные  $[0,1]$  векторы,  $A$ ,  $B$ ,  $G$ ,  $D$ ,  $F$ ,  $K$ ,  $H$  — двоичные  $[0,1]$  матрицы,  $A$  — квадратная не особенная,  $r$ ,  $s$ ,  $q$  — постоянные двоичные  $[0,1]$  векторы,  $t = 1, 2, 3, \dots, T$  — параметр целого типа,  $\oplus$  — оператор сложения по модулю 2 ( $\text{mod}2$ ).

В выражении (1) оператор  $\&$  означает, что компонентами вектора  $z(t)$  являются логические (или алгебраические по  $\text{mod} 2$ ) произведения компонент вектора  $x(t)$ , номера которых задаются ненулевыми (единичными) значениями компонент матрицы  $K$ . Таким образом, компонентами вектора  $z(t)$  являются конъюнкции из компонент вектора  $x(t)$ .

Легко показать, что динамические системы вида (1) можно представить в форме линейной последовательностной машины (ЛПМ). Модели в форме ЛПМ, в свою очередь, могут быть использованы в качестве исходных моделей для численного оценивания состояний и параметров различных вычислительных систем [3].

Недетерминированный конечный автомат (НКА) является обобщением детерминированного. Недетерминированный конечный автомат можно получить из автомата, описываемого выражением (1), двумя путями:

1. Если положить, что компоненты двоичных векторов  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $u(t)$ ,  $z(t)$  в выражении (1) являются логическими переменными, истинность 1 или ложность 0 которых задаются некоторыми вероятностями  $P\{x_i(t) = 1\}$ ,  $P\{y_i(t) = 1\}$ ,  $P\{u_i(t) = 1\}$ ,  $P\{z_i(t) = 1\}$

2. Если положить, что компоненты двоичных векторов  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $u(t)$ ,  $z(t)$  в выражении (1) являются лингвистическими переменными с известными функциями принадлежности  $\mu\{x_i(t)\}$ ,  $\mu\{y_i(t)\}$ ,  $\mu\{u_i(t)\}$ ,  $\mu\{z_i(t)\}$ .

В первом случае выражение (1) должно быть дополнено выражениями для вычисления вероятностей компонентов вектора  $x(t+1)$ , которые могут сводиться к вычислению полиномиальных выражений вида [4]:

$$P_{i,k+1} = (-2)^0 \sum_{i=1}^n P_{ik} + (-2)^1 \sum_{i,j} P_{ik} P_{jk} + (-2)^2 \sum_{i,j,q} P_{ik} P_{jk} P_{qk} + \dots \quad (2)$$

$$\dots + (-2)^{N-1} \prod_{i=1}^n P_{ik}.$$

Тогда, если задаться точностью моделирования, то можно указать алгоритм вычисления вероятности [4] с учетом минимального числа членов полинома (2).

Во втором случае выражение (1) должно быть дополнено выражениями для вычисления функций принадлежности компонентов вектора  $x(t+1)$ , которые могут [3] быть получены с использованием правила вычисления функции принадлежности суммы переменных по модулю 2 и правила вычисления функции принадлежности произведения переменных по модулю 2.

В этом случае так же, если задаться точностью моделирования, то можно указать алгоритм, минимизирующий число вычислений.

#### Литература

1. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. М.: Наука, 1966. 370 с.
2. Городецкий А. Е., Дубаренко В. В., Ерофеев А. А. Алгебраический подход к решению задач логического управления // А и Т, 2000. № 2. С. 127–138.
3. Городецкий А. Е., Тарасова И. Л., Артеменко Ю. Н., Козлов В. В. Вычисления в системах управления. Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 480 с.
4. Городецкий А. Е., Дубаренко В. В. Комбинаторный метод вычисления вероятности сложных логических функций // ЖВМ и МФ, 1999, том 39, № 7, С. 1246–1248.

#### Решение обратной геометрической задачи об антиплоских колебаниях слоя методом возмущений

**Углич П. С.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

puglich@inbox.ru

Рассмотрена задача об антиплоских колебаниях упругого слоя с неровной нижней границей. Для решения прямой задачи использованы метод граничного элемента и две различные модификации метода возмущений. Рассмотрены



различные способы решения обратной геометрической задачи по определению формы неровной нижней поверхности слоя по характеру колебаний верхней.

## Виртуальный читальный зал научно-технической литературы

**Хатламаджиян П. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
mychyshka@yandex.ru

Бурное развитие информационных технологий и использование их в самых различных областях человеческой деятельности привело к тому, что помимо задач передачи, хранения и обработки информации возникла не менее, а в ряде случаев и более важная задача защиты информации в сети Internet. К настоящему времени разработаны достаточно эффективные методы противодействия несанкционированному копированию данных, однако стоит подчеркнуть, что не существует такой защиты, которую было бы невозможно снять.

Целью представленной работы является создание и реализация схемы функционирования электронного читального зала, литература в котором «защищена от выноса», а также разработка Web-интерфейса для чтения учебных материалов в таком читальном зале.

Учебные контенты библиотеки хранятся в виде pdf-файлов, пользователь (читатель) просматривает их в постраничном виде. При этом отображаемая страница, получаемая на основе pdf-файла, представляет собой jpg-файл, качество которого вполне пригодно для чтения с экрана, но неудовлетворительно с точки зрения полиграфического воспроизводства (нелегального копирования).

Представлены два разработанных интерфейса. Интерфейс преподавателя позволяет создавать оглавление учебных материалов, что позволяет оформить в едином стиле оглавления всех учебных материалов, имеющихся в библиотеке. Интерфейс читателя содержит ссылки на все книги, которые есть в библиотеке, и позволяет пользователю выбрать нужную книгу, получить доступ к ее оглавлению и просмотреть любую интересующую часть учебного материала. Интерфейс читателя состоит из двух фреймов: в первом — расположено само оглавление, пункты которого представляют собой гиперссылки, что обеспечивает удобную навигацию по книге, во втором - размещается страница, конвертированная в jpg-файл, которую читатель желает просмотреть. Также есть возможность перехода на следующую и предыдущую страницы выбранного пособия соответственно, а также на любую другую страницу.

Серверное приложение, реализующее постраничную конвертацию pdf-файла, разработано с использованием PDF to Image SDK фирмы AdultPDF.

Представленная система пригодна для размещения учебных материалов (в том числе и защищенных авторскими правами) в интранет-сети факультета.

## Опыт применения тестового и рейтингового контроля на примере дисциплины «Численные методы»

**Цывенкова О. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
olgaz@math.rsu.ru

Современные образовательные технологии требуют использования различных методов обучения и контроля знаний. Тестирование — эффективный инструмент оценки знаний по тем дисциплинам, содержание которых в достаточной степени формализовано и обеспечено методическими материалами.

Практические занятия по дисциплинам «Численные методы» и «Вычислительная математика» предусмотрены образовательным стандартом специальности «прикладная математика и информатика» и направления подготовки «информационные технологии». На факультете математики, механики и компьютерных наук для поддержки этих курсов разработана система тестового и рейтингового контроля знаний.

Эта система предусматривает возможность тестирования в бланковой и электронной формах. Тесты состоят из 10 заданий с выбором одного из предлагаемых вариантов ответа и 5 заданий, ответ на которые дается студентом в краткой форме.

Предлагаемые тесты позволяют оценить уровень знаний по отдельным темам курса. Преподавание дисциплины с использованием системы тестового контроля позволяет реализовать обучение по индивидуальным образовательным траекториям, организовать контроль самостоятельной работы студентов и внедрить рейтинговую систему оценки знаний. Рейтинг позволяет оптимизировать обучение по предмету за счет выбора уровня выполнения заданий, метода решения, программного обеспечения и срока сдачи выполненных работ. Опыт внедрения рейтинговой системы показал ее востребованность студенческой аудиторией, ее гибкость и наглядность в подведении итогов практической работы студента в семестре. Так, в шестом семестре студенты 3 курса выполнили практические задания по темам «Решение нелинейных уравнений», «Системы линейных уравнений», «Решение систем нелинейных уравнений» и «Численное интегрирование». По каждой теме студент выполнял задания, выбирая различные методы решения, уровень реализации и среду программирования. Каждое задание оценивалось согласно рейтингу. Рейтинговые оценки использовались при подведении итогов в конце семестра. Помимо этого, тестирование по отдельной теме позволяет также заработать дополнительные баллы рейтинга и подготовиться к промежуточному и итоговому контролю по теоретической части курса.

Эффективность разработанной системы тестирования заключается в том, что проверку своих знаний студент может проводить самостоятельно в специально оборудованном классе.

## Моделирование машущего полета насекомых в Simulink

**Шевцова В. С.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
barbaragen4@mail.ru

Создание беспилотных летательных объектов - разведчиков (MAVs — micro air vehicles и UAVs — unmanned air vehicles) представляет собой область, в которой заимствование идей из природы представлено особенно ярко. Одним из основных требований, предъявляемых к MAVs, является реализация различных способов полета, свойственных насекомым — способность к медленному полету, маневрированию и зависанию. Различные паттерны траектории крыла возникают за счет сенсорных сигналов, участвующих в управлении полетом и создающих силы и моменты, обуславливающие различное поведение насекомого в полете. Однако до сих пор механизм генерации и поддержания того или иного типа полета остается неисследованным.

Для исследования роли различных кинематических параметров (углы и фазы поворота крыльев относительно осей и т.д.) и их взаимодействия была разработана 3D динамическая биомеханическая модель бабочки. Модель была создана в системе символьческих вычислений MATLAB Simulink. При ее построении использовались морфологические параметры (вес, размеры) реальных бабочек *Manduca sexta*, заимствованные из опубликованных ранее работ (Willmott and Ellington, 1997). Модель была представлена системой твердых тел, соединенных трехосными шарнирами. На данной стадии исследования, крылья моделировались недеформируемыми пластинами. Массо-инерционные характеристики тел были рассчитаны методом конечных элементов. Динамическое взаимодействие между телами задавалось с помощью действующих на связи актуаторов. Управление осуществлялось посредством обратной связи через сенсоры, определявшие взаимные угловые перемещения. Амплитудно-фазовые характеристики движений крыла также были заимствованы из опубликованных ранее экспериментальных исследований полета мотылька с помощью высокоскоростной видеосъемки. Модель аэродинамических сил, обусловленных маховыми и вращательными (вокруг собственной оси) движениями крыла была заимствована из исследования Хедрика и Дэниэла, которые сформулировали задачу полета насекомого в режиме висения как обратную задачу механики.

Полученные результаты позволили с максимальной наглядностью изучить влияние временных и динамических характеристик нейромоторной системы насекомого на устойчивость исследуемого режима полета.

## Об определении неоднородных свойств реологических материалов при крутильных колебаниях

**Шевцова М. С.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
mariamarcs@bk.ru

Многие биологические ткани обладают сложной реологией, которая часто описывается моделью стандартного вязкоупругого тела. С целью разработки метода идентификации вязкоупругих характеристик исследована задача о крутильных колебаниях вязкоупругого неоднородного стержня. В рамках концепции комплексных модулей для неоднородного вязкоупругого материала реализовано решение прямой задачи с использованием метода конечного элемента в пакете COMSOL Multiphysics для неоднородных балок. Выполнен сравнительный численный анализ амплитудно-частотных характеристик для балок с квадратичным законом распределения модуля сдвига, проведено сравнение собственных частот для одномерной и трехмерной модели колебаний балок с несимметричным сечением. Обратная задача об определении свойств неоднородных балок из вязкоупругого материала при анализе крутильных колебаний сведена к решению уравнения Фредгольма первого рода. Численное решение обратной задачи осуществлено в процессе конечного числа итераций с использованием метода А. Н. Тихонова при автоматическом выборе параметра регуляризации. Представлены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению закона распределения модуля сдвига и реологических характеристик.

## Потеря устойчивости составного пористого стержня при осевом сжатии

**Шейдаков Д. Н.**

*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*  
sheidakov@mail.ru

Устойчивость равновесия деформируемых тел является одной из важнейших проблем механики. Вследствие развития технологий важным становится вопрос анализа устойчивости сооружений из различных новых материалов. В частности, в современной автопромышленности и авиастроении все больше и больше используются такие высокопористые материалы, как металлические и полимерные пены. Конструкции из этих материалов имеют ряд преимуществ: они мало весят, имеют высокую удельную прочность, а также большие возможности к поглощению энергии. Как правило, такие конструкции имеют составную структуру (металлическая или полимерная пена покрыта твердой и жесткой оболочкой).

Целью данного исследования является анализ устойчивости составного цилиндрического стержня при осевом сжатии. Проблема изучается на основе точных трехмерных уравнений нелинейной теории упругости. Для описания поведения сердцевины стержня, выполненной из пены, используется модель микрополярной среды. Путем численного решения линеаризованных уравнений равновесия, для ряда материалов найдены спектры критических значений удельного

осевого сжатия и соответствующие им моды выпучивания. Проанализировано влияние микроструктуры материала и размеров стержня на потерю устойчивости.

Работа выполнена при поддержке Президента РФ (грант МК-4984.2008.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 09-01-00459-а).

## Равновесие и устойчивость нелинейно-упругого бруса при чистом изгибе

**Шубчинская Н. Ю.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
natfantasy2005@rambler.ru

На основе полуобратного представления, описывающего изгибание прямоугольника в сектор кругового кольца, изучена задача о равновесии и устойчивости бруса при чистом изгибе. Рассмотренное преобразование является одной из хорошо известных универсальных деформаций для несжимаемых сред; в настоящей работе рассмотрен случай сжимаемых материалов. Используются две модели нелинейно-упругого поведения: полулинейный материал (материал Джона) и материал Блейтца и Ко (общий трехконстантный вариант). Разработана программа численного анализа нелинейной краевой задачи для функции, описывающей радиус точки в деформированном состоянии. Тестирование этой программы осуществлялось с использованием точных решений задачи об изгибе, известных для полулинейного материала и упрощенного варианта модели Блейтца и Ко. Для всех рассмотренных моделей установлено, что диаграмма изгиба (график зависимости изгибающего момента от угла раствора сектора — деформированного прямоугольника) имеет точку максимума, за которой следует падающий участок. Наличие такого участка свидетельствует о возможности потери устойчивости процесса деформирования при чистом изгибе.

Для изучения устойчивости использован бифуркационный подход, основанный на линеаризации уравнений равновесия. Установлено, что точки бифуркации могут существовать и на возрастающем участке диаграммы изгиба. В работе представлены результаты влияния геометрических и материальных параметров на возможность потери устойчивости при изгибе.

Mathematical modeling of the human muscular-skeletal system:  
posturographic and myographic study

**Grishkevichus J.\*, Karpinsky M. Y.\*\* , Kizilova N. N.\*\*\***

*\*Vilnius, Lithuania, Vilnius Gediminas technical university*

*\*\*Kharkov, Ukraine, Sitenko Institute of a pathology of a backbone and joints*

*\*\*\*Kharkov, Ukraine, Kharkov National University*

nnk\_@bk.ru

Posturography is one of the simple effective tool for investigation of the sway parameters of the human body. Computerized posturography is widely used as a convenient test for diagnostics of different musculoskeletal, vestibular, nervous, auditory and visual pathology, age-related changes and even the emotional state of the individual. The dynamical curves  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$  which are the coordinates of the centre of mass of the human body can be registered during arbitrary quiet stance. Basing on the measurement data the trajectories  $Y(X)$  of the projection of the centre of mass onto the horizontal plane and some integral curves can be calculated easily. As it was shown by vast measurements an increase in the sway amplitude is the main prognostic parameter of different disorders. In some tests the amplitude increases in assigned planes or/and at special test conditions.

Usually a quiet two-legged stance is tested. In the present paper the measurement data of computer-assisted posturography and myography are analysed basing on the mathematical models developed by the authors. Quiet two-legged stance and uncomfortable one-legged stance of the healthy volunteers and patients with some disorders have been studied. Tests with both included (open eyes) and excluded (closed eyes) visual control of the stance have been analysed. The models of the human body as complex multilink inverted pendulums with 3-8 links (depending on the test conditions) are proposed. The simplest model of the body sway in the sagittal plane at two-legged stance gives the system of linear ODS that can be directly analyzed, while other models are presented by non-linear ODS. Solutions of the nonlinear ODS have been computed for the case of the small amplitude body sway.

It was shown the comparative analysis of the two-legged and one-legged stances can be successfully used for differential diagnostics of spine and joint pathology. Patients with different pathology exhibit some clear distinctions in relative position  $(X, Y)$  of the centre of mass at the two-legged and one-legged stances and in the amplitude of the body sway in  $X$  and  $Y$  directions. Some novel parameters of the  $X(t)$  and  $Y(t)$  curves have been proposed for medical diagnostics and their biomechanical explanation is proposed.

## Содержание

Азарова П. А., Явруян О. В. О реконструкции параметров трещин в вязкоупругом слое . . . . .	5
Айзикович С. М., Васильев А. С., Кренев Л. И., Кречко Л. М., Кузнецова Т. А. Контактные задачи для материалов с покрытиями сложной структуры с учетом изменения модуля Юнга и коэффициента Пуассона . . . . .	6
Айзинбуд А. К., Еремеев В. А. Моделирование движения гибкой тонкой частицы в сдвиговом потоке жидкости . . . . .	6
Алексеев Д. С., Баду Е. И., Городецкий А. Е., Дубаренко В. В., Кучмин А. Ю., Селиванова Е. С., Тарасова И. Л. Моделирование процессов управления колебаниями ореола ресничек мерцательного эпителия . . . . .	7
Алексеев Л. Н., Булыгин Ю. И., Маслов Е. И., Месхи Б. Ч. Конечно-элементное моделирование активной вентиляции загрязненных помещений . . . . .	9
Аль-Муджагед И. И., Бегун П. И. Биомеханический анализ состояния мочевого пузыря в норме, при патологии, коррекции и реконструкции . . . . .	9
Андриевский А. Н., Бегун П. И., Кривохижина О. В., Лебедева Е. А., Пантелеева Н. А. Биомеханическое исследование состояния аорты при дилатации коарктационного сегмента у детей первых месяцев жизни . . . . .	10
Аникина Т. А. Идентификация реологических свойств при изгибных колебаниях . . . . .	11
Балакин А. А., Кобелев А. В., Лукин О. Н., Проценко Ю. Л., Смолюк Л. Т. Моделирование вязкоупругих свойств изолированных образцов миокарда . . . . .	12
Баранов И. В., Напрасников В. В., Соловьев А. Н., Шевцов М. Ю. О реконструкции поврежденного состояния композитов на основе сочетания МКЭ и ГА . . . . .	13
Батищев В. А., Загребельный М. В. Физический механизм «винтовых» течений жидкости в упругой цилиндрической трубке . . . . .	13
Бауэр С. М., Краковская Е. В., Семенов Б. Н. Математические модели некоторых декомпрессионных операций в офтальмологии . . . . .	14
Бегун П. И. Содержательные модели, математическое и компьютерное моделирование в дисциплине «Биомеханическое моделирование объектов протезирования» . . . . .	15
Бердышев Д. В., Гузев М. А., Израильский Ю. Г. Численное моделирование синхронного и асинхронного механизмов двойного переноса протона в порфирине . . . . .	16
Березин Н. С., Пряхина О. Д., Смирнова А. В. Влияние дефекта на спектральные свойства полуограниченных электроупругих сред . . . . .	17

Бострём А., Голуб М. В. Моделирование распространения упругих волн в многослойных композитах с интерфейсными отслоениями посредством пружинных граничных условий . . . . .	18
Бушкова О. С., Русанова Я. М., Чердынцева М. И. Технология реализации принципа адаптивности электронных учебных пособий . . . . .	19
Василенко С. Ю., Макарович Н. С., Спожакин А. С. О реконструкции расслоений в слоистых композитах на основе сочетания ГИУ и МКЭ	20
Ватулин С. В., Вернигора Г. Д. О моделировании функционально-градиентных композитов . . . . .	21
Ватульян А. О. О некоторых постановках обратных задач для упругих и пористоупругих сред . . . . .	21
Ватульян А. О., Нестеров С. А. Коэффициентные обратные задачи теплопроводности для неоднородной среды . . . . .	22
Ватульян К. А., Устинов Ю. А. Задача Сен-Венана об изгибе поперечной силой призмы с ромбоэдрической анизотропией . . . . .	23
Водолазская И. В., Исакова О. П., Тарасевич Ю. Ю. Динамика формы высыхающей капли биологической жидкости . . . . .	25
Гейнрих К. Е., Фоменко С. И. Распространение волн в многослойных средах с функционально-градиентными покрытиями . . . . .	26
Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Зеemann В., Кваша О. В., Керн Д. Волновые поля, возбуждаемые в упругой балке пьезоэлектрическими элементами: теория и эксперимент . . . . .	27
Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Еремин А. А., Кривонос А. С. Расчет динамической реакции протяженных многослойных анизотропных структур . . . . .	28
Городецкий А. Е. Проблемы нечеткого вывода на основе правил композиции . . . . .	28
Городецкий А. Е., Дорошенко М. С. Математическая и компьютерная модель образования пористого кремния . . . . .	30
Григоренко К. С., Соловьева А. А., Хартиев С. М. О моделировании внутренних волн в жидкости со сложной стратификацией . . . . .	32
Гришин А. Н., Дунаевский Г. Е., Корнелик С. Е. Математическое моделирование кровотока во вращающемся магнитном поле . . . . .	33
Губа А. В. О растяжении и кручении цилиндрической оболочки с винтовой дислокацией . . . . .	34
Гуглева Ю. С., Курбатова Н. В., Чумакова Е. С. Анализ некоторых характеристик естественно закрученного стержня при изгибе поперечной силой . . . . .	34
Дерезин С. В. Условия совместности больших деформаций и внутренние напряжения в биологических тканях . . . . .	35
Домашенкина Т. В. Моделирование фокусирующего ультразвукового пьезоизлучателя с секционированными электродами в конечно-элементном пакете ANSYS . . . . .	36
Дударев В. В. Об определении неоднородного предварительного напряженного состояния для стержней . . . . .	37



Еремеев В. А., Кучеева Д. О., Фрейдин А. Б. Исследование влияния механических нагрузок на кинетику границы окостенения в пластинке роста . . . . .	38
Ерусалимский Я. М., Ревина С. В., Чернявская И. А. Первые итоги асинхронного обучения на факультете математики, механики и компьютерных наук ЮФУ . . . . .	39
Зеленина А. А., Зубов Л. М. Квазитвердые движения тел с распределенными дислокациями . . . . .	40
Зиннатова Н. Х. Компьютерное моделирование поясничного отдела позвоночника в норме и при дисковых патологиях . . . . .	41
Зубов Л. М. Равновесие и устойчивость упругого цилиндра с непрерывно распределенными дисклинациями . . . . .	42
Ильичев В. Г. Эколого-эволюционные изменения в водоемах Азовского бассейна при деформации климата. Модельный подход . . . . .	43
Кабельков А. Н., Пасенчук А. Э., Притыкин Д. Е. Численно аналитические методы исследования характеристик механизмов с замкнутыми кинематическими цепями . . . . .	43
Кабельков А. Н., Юренко К. И. Математическое моделирование систем автоведения поездов . . . . .	44
Кадомцев И. Г. Упругопластическое соударение тел в случае их плотного касания . . . . .	45
Казанцев А. В. Применение программных продуктов Materialise Mimics и 3-matic для подготовки моделей биологических структур к анализу методом конечных элементов . . . . .	46
Кармазин А. В., Кириллова Е. В., Сыромятников П. В. Волны Лэмба, возбуждаемые поверхностным источником в симметричных композиитах . . . . .	47
Карпинский Д. Н., Шишкин А. Н. Расчет влияния капиллярных явлений на амплитудно-частотную характеристику атомно-силового микроскопа . . . . .	48
Карякин М. И., Михалкович С. С., Надолин Д. К. О перспективах создания Учебно-сертификационного ИТ Центра мехмата . . . . .	49
Карякин М. И., Сухов Д. Ю. Об использовании средств компьютерной алгебры для анализа устойчивости нелинейно упругих тел канонической формы . . . . .	51
Кизилова Н. Н. Термодинамика биологического роста: обзор математических моделей . . . . .	52
Колесников А. М. Высокоэластичные цилиндрические структуры сложного поперечного сечения . . . . .	53
Колосова Е. М., Наседкин А. В. О некоторых особенностях решения задач механики контактных взаимодействий в конечно-элементном пакете ANSYS для сред с дефектами, неоднородностями и усложненными свойствами . . . . .	54
Колосова Е. М., Чебаков М. И. Трехмерная контактная задача для цилиндрического шарнира с протекторными вставками . . . . .	55

Кряквин В. Д., Налбандян О. В. Система электронного голосования в управлении современным университетом . . . . .	56
Кузьменко С. М. Об определении межфазной границы в многокомпонентном упругом теле . . . . .	57
Куракин Л. Г. Бифуркации в системах с косимметрией . . . . .	58
Куракин Л. Г., Островская И. В. Устойчивость томсоновских многоугольников вне круговой области . . . . .	59
Кучмин А. Ю., Тарасова И. Л. Методика моделирования микро-нано биологических систем в виде стохастического клеточного автомата	60
Кучумов А. Г., Лохов В. А., Няшин Ю. И. Задачи управления напряжениями и вопросы оптимизации роста костной ткани при установке фиксаторов с эффектом памяти формы в челюстно-лицевой хирургии . . . . .	62
Кушнирёва И. В., Шабрыкина Н. С. Математическое моделирование процесса микроциркуляции . . . . .	63
Лавриненко В. В. Веб-технологии для людей с ограниченными физическими возможностями . . . . .	64
Ларченко В. В. Моделирование вторичного течения последовательностью краевых задач с кратными собственными значениями . . . . .	65
Лебединская Е. Н. Имитационное моделирование реакции взаимодействующих систем организма на комплекс внешних нагрузок . . . . .	66
Логвенков С. А., Штейн А. А., Юдина Е. Н. Математическое моделирование массообмена в корне растения . . . . .	67
Лупейко Т. Г., Соловьев А. Н. О моделировании преобразователей на основе флексоэлектрического эффекта . . . . .	69
Майорова О. А. Моделирование больших деформаций с использованием конечно-элементных пакетов . . . . .	69
Маслов Л. Б. Математическое моделирование вибрационных потоков жидкости в костных тканях опорно-двигательного аппарата . . . . .	70
Мелехов А. П., Ревина С. В. Моделирование течений вязкой жидкости асимптотическими и численными методами . . . . .	71
Меркулов А. М., Тарасевич Т. Ю. Переломы Коллиса. Аспекты консервативного лечения . . . . .	72
Михалкович С. С. Создание информационного портала на основе сайта мехмата . . . . .	73
Надолин К. А. Моделирование распространения вещества от стационарного источника в мелком потоке вязкой жидкости . . . . .	75
Надолин К. А., Наседкин А. В. Перспективы подготовки магистерской образовательной программы по математическому моделированию и компьютерной механике . . . . .	76
Напрасников В. В., Скалиух А. С. Использование конечноэлементных пакетов в преподавании естественнонаучных и технических дисциплин . . . . .	78

Наседкин А. В. Математическое моделирование пьезокомпозиционных материалов и пьезоэлектрических устройств мощного ультразвука для биомедицинских применений . . . . .	78
Наседкина А. А. Конечно-элементное моделирование неоднородного по-роупругого цилиндрического слоя с кольцевой внутренней трещи-ной при нестационарном воздействии . . . . .	79
Нефедов В. В. Исследование устойчивых режимов работы некоторых электромеханических систем . . . . .	80
Оганисян М. Ю. Методика предоперационного прогнозирования состо-яния левого желудочка сердца . . . . .	81
Панфилов И. А., Устинов Ю. А. Колебания и волны цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией . . . . .	82
Попов А. В. Неустойчивость двуслойной цилиндрической оболочки с внутренними напряжениями . . . . .	84
Пустовалова О. Г. Напряженно-деформированное состояние цилиндра с винтовой дислокацией при учете структуры материала . . . . .	84
Скалиух А. С. Об одной трехмерной модели поликристаллических сегнетоэлектриков-сегнетоэластиков . . . . .	86
Соколов А. В. Актуальные модели механики крупных кровеносных сосудов	86
Тарасова И. Л. Методика моделирования технических систем в виде недетерминированного конечного автомата . . . . .	87
Углич П. С. Решение обратной геометрической задачи об антиплоских колебаниях слоя методом возмущений . . . . .	88
Хатламаджиян П. А. Виртуальный читальный зал научно-технической литературы . . . . .	89
Цывенкова О. А. Опыт применения тестового и рейтингового контроля на примере дисциплины «Численные методы» . . . . .	90
Шевцова В. С. Моделирование машущего полета насекомых в Simulink	91
Шевцова М. С. Об определении неоднородных свойств реологических материалов при крутильных колебаниях . . . . .	92
Шейдаков Д. Н. Потеря устойчивости составного пористого стержня при осевом сжатии . . . . .	92
Шубчинская Н. Ю. Равновесие и устойчивость нелинейно-упругого бру-са при чистом изгибе . . . . .	93
Grishkevichus J., Karpinsky M. Y., Kizilova N. N. Mathematical modeling of the human muscular-skeletal system: posturographic and myographic study . . . . .	94

Для заметок