

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И  
БИОМЕХАНИКА В СОВРЕМЕННОМ  
УНИВЕРСИТЕТЕ**

**ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ VI ВСЕРОССИЙСКОЙ  
ШКОЛЫ-СЕМИНАРА**

30 мая — 2 июня 2011 года

Ростов-на-Дону  
Издательство Южного федерального университета  
2011

ББК В2.Я 431

Редакторы: А. О. Ватульян, М. И. Карякин

Математическое моделирование и биомеханика в современном университете. Тезисы докладов VI Всероссийской школы-семинара, пос. Дивноморское, 30 мая — 2 июня 2011 г., Ростов-на-Дону, Издательство Южного федерального университета, 2011 г., 91 с.

Сборник содержит тезисы докладов, представленные на VI Всероссийскую школу-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете».

Основной целью школы-семинара является обсуждение современных направлений и тенденций научных исследований в области математического моделирования применительно к новым задачам механики и биомеханики. Обсуждаются результаты моделирования тел из физически и геометрически нелинейных материалов, проблемы вычислительной механики (методы конечных и граничных элементов), идентификации параметров для материалов со сложными физико-механическими свойствами (пористость, нелинейность, неоднородность, микроструктура, пьезоэффект), задачи моделирования, функционирования и роста различных биологических тканей и систем (костная и мышечная ткани, ткань кровеносных сосудов), задачи гидродинамики кровообращения, моделирование и оптимизация имплантантов.

Важными аспектами работы школы являются изучение вопросов интеграции этих направлений с процессом современного классического естественнонаучного и инженерного образования, анализ влияния междисциплинарных исследований на формирование современного ученого, обсуждение современных методов и технологий преподавания технических и естественнонаучных дисциплин, формирование новых учебных курсов и специализаций в рамках обсуждаемых на школе-семинаре научных направлений, приобщение молодых исследователей к изучению новых объектов.

*VI Всероссийская конференция «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, 30 мая — 2 июня 2011 г.) поддержана Российским фондом фундаментальных исследований*

## Организаторы:

Южный федеральный университет

Донской государственной технической университет

Южный научный центр РАН

## Программный комитет школы-семинара:

Белоконь А. В., президент Южного федерального университета, зав. кафедрой математического моделирования Южного федерального университета, Ростов-на-Дону — председатель Программного комитета

Бауэр С. М., профессор С.-Петербургского университета, Санкт-Петербург

Ватульян А. О., зав. кафедрой теории упругости Южного федерального университета, Ростов-на-Дону — заместитель председателя Программного комитета

Гузев М. А., член-корреспондент РАН, директор института прикладной математики Дальневосточного отделения РАН, Владивосток

Еремеев В. А., зав. лабораторией механики активных материалов Южного научного центра РАН, Ростов-на-Дону

Илюхин А. А., зав. кафедрой ТГПИ, Таганрог

Индейцев Д. А., член-корреспондент РАН, директор ИПМаш РАН, Санкт-Петербург

Кабельков А. Н., декан физико-математического факультета ЮРГТУ (НПИ), Новочеркасск

Коссович Л. Ю., ректор Саратовского госуниверситета, Саратов

Любимов Г. А., зав. отделом Института механики МГУ, председатель совета РАН по биомеханике

Месхи Б. Ч., ректор Донского государственного технического университета, Ростов-на-Дону

Морозов Н. Ф., академик РАН, зав. кафедрой теории упругости СПбГУ, Санкт-Петербург

Наседкин А. В., профессор кафедры математического моделирования Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

Няшин Ю. И., зав. кафедрой теоретической механики ПГТУ, Пермь

Пряхина О. Д., профессор кафедры высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций КубГУ, Краснодар

Соловьев А. Н., зав. кафедрой сопротивления материалов Донского государственного технического университета, Ростов-на-Дону

Сурков Ф. А., директор НИИ механики и прикладной математики им. Воронича И. И., зав. кафедрой глобальных информационных систем Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

Сухинов А. И., зав. кафедрой высшей математики технологического института Южного федерального университета, Таганрог

Тарасевич Ю. Ю., зав. кафедрой прикладной математики и информатики АГУ, Астрахань

Устинов Ю. А., профессор кафедры теории упругости Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

Цатурян А. К., ведущий научный сотрудник Института механики МГУ (Москва), член Международного совета по биомеханике

Шевцов С. Н., зав. лаб. машиностроения и высоких технологий Южного научного центра РАН, Ростов-на-Дону

Штейн А. А., ведущий научный сотрудник Института механики МГУ, Москва

### Организационный комитет школы-семинара:

Карякин М. И., декан факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета — председатель оргкомитета

Ерусалимский Я. М., профессор факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета

Курбатова Н. В., доцент факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета

Надолин К. А., заместитель декана факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета

Попов А. В., инженер кафедры теории упругости Южного федерального университета

Сафроненко В. Г., зам. директора НИИ механики и прикладной математики им. Воронича И. И. Южного федерального университета

Сухов Д. Ю., ассистент кафедры теории упругости Южного федерального университета

Цыбенкова О. А., заместитель декана факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета

## Численные исследования уединенных волн в наполненных жидкостью упругих трубках

**Абдель Латиф М. С.**

*Астрахань, Астраханский государственный университет*  
m\_gazia@hotmail.com

В работе исследовано возмущенное уравнение Кортевега–де Фриза

$$u_t + \mu_1 uu_x + \mu_3 u_{xxx} + \mu_4 u = 0 \quad (1)$$

с использованием метода разложения Адомяна (Adomian decomposition method, ADM) [1]. Кудряшов [2] доказал, что точные решения уравнения (1) не могут быть найдены. В артериальной механике артерия рассматривается как тонкостенная предварительно напряженная упругая трубка, а кровь — как несжимаемая ньютоновская жидкость [3]. Определяющее уравнение, которое моделирует слабо нелинейные волны в таких наполненных жидкостью упругих трубках, — это возмущенное уравнение Кортевега–де Фриза (1) [3]. Это уравнение получено с учетом нелинейности, дисперсии и диссипации как в вязкоупругой трубке, так и в вязкой жидкости.  $\mu_1, \mu_3$  — некоторые константы, характеризующие упругие свойства трубки.  $\mu_4$  — некоторая константа, характеризующая вязкость жидкости. Показано, что это уравнение имеет решение в виде уединенной волны, и амплитуда этой уединенной волны медленно затухает во времени.

### Литература

1. Adomian G. A new approach to nonlinear partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. 1984. Vol. 102. No. 2. P. 420–434.
2. Kudryashov N. A. Meromorphic solutions of nonlinear ordinary differential equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2010. Vol. 15. P. 2778–2790.
3. Demiray H. On the derivation of some non-linear evolution equations and their progressive wave solutions // Int. J. Non. Linear. Mech. 2003. Vol. 38. P. 63–70.

## Симметричный анализ и некоторые новые точные решения уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами, возникающего в артериальной механике

**Абдель Латиф М. С.**

*Астрахань, Астраханский государственный университет*  
m\_gazia@hotmail.com

Работа посвящена изучению уравнения Кортевега–де Фриза (КдВ) с переменными коэффициентами, которое записывается в виде

$$u_t + \mu_1 uu_x + \mu_3 u_{xxx} + h(t)u_x = 0, \quad (1)$$

где  $\mu_1, \mu_3$  — некоторые константы, характеризующие свойства материала трубки.  $t$  является отмасштабированной координатой вдоль оси сосуда после статической деформации, характеризующей осесимметричный стеноз на поверхности артериальной стенки.  $x$  является переменной, зависящей от времени и координаты вдоль оси сосуда.  $h(t)$  характеризует форму стеноза. В артериальной механике артерия рассматривается как тонкостенная предварительно напряженная упругая трубка с переменным радиусом (или со стенозом), а кровь — как идеальная жидкость [1]. Определяющее уравнение, которое моделирует слабо нелинейные волны в таких наполненных жидкостью упругих трубках, — это уравнение КдВ с переменным коэффициентом (1).

С помощью классического метода анализа симметрии и использования эллиптических функций Якоби найдены новые точные решения уравнения (1). Получено решение уравнения (1) в виде уединенной волны

$$u = \frac{\alpha + 8\mu_3}{\mu_1} - \frac{12\mu_3}{\mu_1} \operatorname{th}^2 \left( x - \int h(t) dt - \alpha t \right), \quad (2)$$

скорость распространения которой задается формулой

$$\nu = (\alpha + h(t))^{-1}. \quad (3)$$

Показано, что амплитуда уединенной волны зависит от параметров трубки  $\mu_1, \mu_3$ , а скорость распространения — от формы стеноза  $h(t)$ .

## Литература

1. Demiray H. Variable coefficient modified KdV equation in fluid-filled elastic tubes with stenosis: Solitary waves // *Chaos Soliton Fract.* 2009. Vol. 42. No. 1. P. 358–364.

## Техники построения и оценки экспертных систем

**Аболмасов Д. С., Курбатова Н. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
nvk@math.sfedu.ru

Бурный рост современных компьютерных технологий расширяет перспективы автоматизации практической деятельности человека, в том числе, в медицине. К числу развивающихся медицинских новаций, базирующихся на высокоскоростных и ресурсоемких вычислительных процессах, следует отнести разработку и построение экспертных систем, которые могут быть незаменимы на этапах диагностики, назначения лечебных мероприятий и прогнозирования исходов.

Следует отметить, что в силу идентичности идеологии построения экспертных систем и их оценки предлагаемая в работе методика вполне пригодна, например, для обратных коэффициентных задач, которые широко используются в биомеханике для идентификации свойств материалов, составляющих живую ткань.

Задачу построения экспертной системы можно разделить на три стадии:

1. сбор представительного фактического материала (описание свойств объектов эксперимента);
2. формирование экспертного заключения по имеющемуся набору объектов;
3. применение тех или иных методов классификации (или в случае слабой экспертизы, самоорганизации) для формирования классификационного правила и получения заключения — прогноза.

Успешно используются в этой связи нейросетевые методики обучения, а также генетические алгоритмы. В руках исследователя оказываются данные, которые имеют целый набор изменяющихся свойств, и могут быть формализованы как многомерные количественные объекты. Прежде чем приступить к непосредственной реализации методов классификации, необходимо исследовать предпосылки кластеризации и последующей классификации в принципе.

Традиционно вначале применяется метод главных компонент (МГК) для снижения размерности.

Однако этим не исчерпываются преимущества МГК; так, возможность визуальной оценки экспертного множества объектов представляется очень важной, хотя и ограничивается случаем 3D пространства. В соответствии с критерием «каменистой осыпи» легко оценить существенные факторы, и, как следствие, количество главных компонент, которое следует использовать при обучении.

Исследования, проведенные авторами, показали, что выбор различных экспертных стратегий приводит к несоразмерным затратам по формированию классификационного правила. Рассмотрен пример экспертных оценок в соответствии с двумя стратегиями заключений. Показаны методики формирования «корректной» стратегии, в результате которой достигается приемлемая классификация и в рамках линейного фильтра, тогда как для «некорректной» стратегии линейный фильтр оказывается несостоятельным на том же обучающем множестве. В этом случае эффективным является персептрон с обратным распространением ошибки, предназначенный для нелинейной классификации.

Оптимальная архитектура персептрона в вычислительном эксперименте содержала восемь внутренних слоев, переменное число нейронов в каждом слое (от трех до восьми), с перемежающимися линейными и логистическими активационными функциями.

Следует заметить, что МГК позволяет также корректировать экспертные оценки в пограничных областях и получать более «тонкие» классификационные правила. Модифицированная экспертная система оказалась надежной для прогноза в случае объектов, не задействованных в обучении.

Таким образом, предлагаемая техника предварительного анализа экспертной системы дает возможность построить качественную и эффективную классификацию на базе МГК и алгоритмов нейронных сетей.

## Локализация колебаний как причина отслоения пленки от упругого основания

**Абрамян А. К.\* , Индейцев Д. А.\* , Мочалова Ю. А.\* , Семенов Б. Н.\*\***

*\* Санкт-Петербург, Институт проблем машиноведения РАН*

*\*\* Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет  
semenov@bs1892.spb.edu*

Тонкостенные покрытия часто используются в качестве защитных или усиливающих элементов конструкции. При деформировании элементов с покрытиями под действием внешних нагрузок на границе основание-покрытие могут возникать значительные напряжения, вызванные несоответствием материальных постоянных, что приводит либо к разрушению покрытия либо его отслоению от основания. Вопросам деламации при статических или ударных нагрузках посвящена обширная библиография. Однако воздействие динамических или вибрационных нагрузок на образование и развитие отслоений изучено в меньшей степени. Этот вопрос требует дальнейшего изучения, т. к. при определенных условиях в протяженных объектах на первоначальных дефектах (первоначальные отслоения, неоднородности адгезионного слоя и т. п.) может происходить локализация колебаний.

Исследована задача о локализации колебаний в окрестности первоначального отслоения струны, лежащей на упругом основании. Проведено сравнение перемещения в кончике отслоения для статической задачи и динамической задачи при ступенчатом нагружении.

Показано, что наибольшее влияние локализация колебаний оказывает на величину перемещения в конце отслоения при совпадении частоты отсечки с собственными частотами отслоенного участка.

Исследован рост отслоения при локализации колебаний на дефекте типа отслоения.

## Математическое моделирование задачи о кручении круговым штампом упругой среды сложной структуры

**Айзикович С. М.\* , Андреева З. В.\* , Васильев А. С.\* , Галыбин А. Н.\*\***

*\* Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*

*\*\* Southampton, UK, Wessex Institute of Technology  
andre.vasiliev@gmail.com*

В работе развит приближенный аналитический метод, позволяющий эффективно решать контактные задачи для материалов с произвольным изменением упругих свойств по глубине. Все результаты строго обоснованы. Для построенных приближенных аналитических решений проводится анализ их погрешности.

Возможности метода иллюстрируются на примере задачи о кручении круговым штампом упругого полупространства с неоднородным по толщине покрытием.



Рассматриваются случаи немонотонного изменения упругих свойств по глубине. В частности, анализируются аналитические решения задачи в случае, когда градиент изменения упругих свойств материала многократно меняет знак. Полученные результаты позволяют решать обратные задачи теории упругости неоднородных сред (задачу контроля изменения по толщине покрытия упругих свойств).

### Математическое моделирование осесимметричной контактной задачи о внедрении штампа в существенно мягкий слой, лежащий на упругом основании

**Айзикович С. М.\* , Андреева Э. В.\* , Волков С. С.\* , Погоцкая И. В.\*\***

*\*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*

*\*\*Минск, Институт тепло-массообмена им. Лыкова НАН Белорусии  
fenix\_rsu@mail.ru*

При идентификации упругих свойств биологических тканей и мягких полимеров возникает задача построения математической модели процесса контактного взаимодействия штампа с основанием, которое представляет собой мягкий упругий слой, лежащий на жесткой деформируемой подложке. Причем во многих практически важных случаях упругие свойства слоя и подложки различаются более чем на порядок. Более того, при описании реальных объектов модель должна учитывать не только существенное отличие упругих свойств покрытия от подложки, но и давать возможность проанализировать неоднородные по глубине покрытия. В настоящей работе предлагается подход, который дает возможность построить приближенное решение описанной выше задачи в аналитической форме.

Рассматривается осесимметричная задача о вдавлении кругового штампа с плоской подошвой в неоднородный по толщине мягкий слой, лежащий на жестком упругом основании. Предполагается, что упругие свойства слоя изменяются по его толщине по произвольному гладкому закону. Для построения решения использован двусторонний асимптотический метод, основывающийся на том, что трансформанта ядра парного интегрального уравнения, к которому сводится задача, аппроксимируется с высокой степенью точностью аналитическим выражением специального вида. Использование аппроксимации трансформанты ядра парного интегрального уравнения позволяет получить приближенное решение задачи в явном виде. Построенное приближенное аналитическое решение задачи является эффективным для всего диапазона изменений характерного геометрического параметра задачи даже в случае существенного различия упругих свойств покрытия и подложки благодаря использованию специально разработанного метода нахождения параметров аппроксимации.

Численные примеры рассмотрены в случаях, когда упругие свойства на границе раздела однородного покрытия и подложки различаются в 100 раз и в 1000 раз. Приводится сравнение полученных контактных напряжений с контактными напряжениями, построенными ранее известными методами для недеформируемой подложки. Рассмотрены случаи различных видов неоднородности покрытия.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (09-08-011410а, 10-08-01296-а, 10-08-90025-Bel-a), ГК № 02.740.11.0413, ГК № 02.740.11.5193, ГК № P1107, АВЦП 2.1.2/10063.

## Математические модели микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких пластин

**Айрапетян Г. С., Саркисян С. О.**

*Гюмри, Гюмрийский гос. педагогический институт им. М. Налбандяна  
slusin@yahoo.com, gayane\_hayrapetyan@mail.ru*

В связи с созданием новых материалов на основе нанотехнологий актуально построение математических моделей микрополярных упругих тонких оболочек и пластин. В работах [1–3] на основе асимптотических свойств решения краевой задачи микрополярной теории упругости в тонких областях были сформулированы гипотезы и построены общие прикладные двумерные теории микрополярных упругих изотропных тонких пластин и оболочек.

В работе [4] построена асимптотика решения граничной задачи микрополярной теории упругости для анизотропного (ортотропного) материала в тонкой пластинке.

В данной работе развивается подход работ [1–3]. На основе асимптотических свойств решения краевой задачи микрополярной теории упругости в тонкой трехмерной области формулируются гипотезы и строятся математические модели микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких пластин. С учетом зависимости от принимаемых значений физических безразмерных параметров построены математические модели микрополярных ортотропных пластин со свободным вращением, со стесненным вращением и теории «с малой сдвиговой жесткостью».

На основе построенных моделей микрополярных пластин рассматривается задача об определении напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластин, при помощи численного анализа выявляются эффективные свойства микрополярного ортотропного материала.

### Литература

1. Саркисян С. О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14. N1. С. 55–66.
2. Саркисян С. О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Доклады РАН. 2011. Т. 436. N2. С. 195–198.
3. Саркисян С. О. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин // Известия НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64. N1. С. 58–67.
4. Айрапетян Г. С. Построение двумерных уравнений статической задачи изгиба ортотропных микрополярных упругих тонких пластин асимптотическим методом // В сб. научных трудов Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 2010. 4–8 октября, Дилижан, Армения. Т. 1. Ереван–2010. С. 56–60.

## Статистический анализ динамики сердцебиения

**Акименко М. О.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
akimenko-85@mail.ru

Анализ временных рядов — одна из ветвей математической статистики, имеющая дело с наблюдениями или измерениями. Временные ряды нашли применение в сейсмологии, астрофизике, медицине и при анализе колебаний валют. В данной работе исследуются ЭКГ записи здорового человека и больного с аритмией. На первом этапе с помощью итерационного алгоритма выделены R–R интервалы, позволяющие оценить вариабельность сердечного ритма. Работоспособность алгоритма протестирована для различных данных: положительного R-зубца, отрицательного R-зубца, кардиограммы с нарушением ритма.

На основании полученных данных проведен временной анализ, построены и проанализированы ритмограмма, гистограмма и скатетогрaмма для здорового человека и больного с аритмией. Также проведен частотный анализ, выделены колебания сердечного ритма различной периодичности, построен спектр мощности. Проведено сравнение результатов статистического анализа ЭКГ записей здорового и больного человека.

### Литература

1. Калюжный Н. А., Сливинский А. П., Кубов В. И. Алгоритм обработки электрокардиограмм для микроконтроллерных устройств с ограниченной емкостью памяти. // Наукові праці, 2007, выпуск 72, том 85, с. 84–92.
2. Reyes-Ramirez I., Guzman-Vargas L. Scaling properties of excursions in heartbeat dynamics. // European Journal of Physics, 2010, V. 89.
3. Keogh, E., Lin, J. & Fu, A. (2006). Finding the Most Unusual Time Series Subsequence: Algorithms and Applications. Knowledge and Information Systems (KAIS). Springer-Verlag.

## Об устойчивости растущей пластинки

**Альтенбах Х.\*, Еремеев В. А.\*\***

*\*Халле, Университет Мартина Лютера Халле-Виттенберг*

*\*\*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

eremeyev.victor@gmail.com

Влияние механических факторов на рост мягких и твердых биологических тканей приводит к необходимости развития механики растущих тел. Характерной особенностью постановки краевых задач механики растущих тел является

наличие дополнительных неклассических краевых условий на поверхности роста, если рассматривается фронтальный рост, или дополнительных кинетических условий в случае объемного роста, влияния на процессы роста электрических полей, химических воздействий, процессов переноса и др. факторов. Анализ, вообще говоря, нелинейных краевых задач механики растущих тел включает в себя также анализ устойчивости.

В данной работе рассматривается потеря устойчивости круглой пластинки, растущей симметрично со своих поверхностей. Для формулировки условий равновесия используются уравнения пространственной нелинейной теории упругости. Закон роста предполагается заданным. Рассматриваются два случая — рост с возникновением остаточных напряжений и без них. В предположении, что рост медленный, в работе используется статический критерий потери устойчивости, основанный на анализе линеаризованных уравнений. Задача сводится к решению спектральной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Полученное решение сравнивается с решением в рамках двумерной теории пластин.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09-01-00849.

### Об определении переменной жесткости круглой пластины

**Аникина Т. А.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
atanusha@mail.ru

В настоящее время пластины являются весьма распространенным приспособлением в хирургии и травматологии. Оптимизация жесткости и ее контроль является актуальной проблемой, особенно при ее зависимости от координат.

В настоящей работе рассматривается проблема определения переменной жесткости круглой пластины при изгибных колебаниях. Колебания вызываются равномерно распределенной нагрузкой при различных граничных условиях (жесткая заделка, шарнирное опирание). Представлено решение прямой задачи с помощью метода Рунге. Проведен анализ точности решения от количества координатных функций. Результаты вычислительных экспериментов показали, что обычно достаточно 4–6 функций. Получены собственные формы и собственные частоты для различных законов изменения жесткости при различных граничных условиях. Приведены результаты численных экспериментов.

Рассмотрена обратная задача, постановка которой заключается в нахождении жесткости по известному смещению пластины в наборе точек. Решение обратной задачи сведено к решению дифференциального уравнения 1-го порядка с переменными коэффициентами, которое решено на основе прямого метода. Приведены результаты численных экспериментов для различных законов распределения жесткости. Выявлены возможности реконструкции по данным перемещениям для различных граничных условий.

Автор выражает благодарность Ватульяну А. О. за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-01-00194-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы (госконтракт П596) и Южного математического института г. Владикавказ.

## Разработка генетических алгоритмов и искусственных нейронных сетей

**Баранов И. В.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
soloviev@math.rsu.ru

Генетические алгоритмы (ГА), ведущие свой отсчёт с пионерской работы Дж. Холланда [1], представляют собой перспективный и сравнительно новый класс вычислительных схем, предназначенных для решения задачи многопараметрической оптимизации целевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min$  в гиперпрямоугольнике  $\Pi^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}$ . Эти алгоритмы занимают промежуточное положение между чисто случайными и строго детерминированными методами поиска и моделируют существенные черты генетического отбора биологической эволюции живых организмов. Несмотря на то, что развитой теории таких алгоритмов на сегодняшний день не существует, они вот уже несколько десятилетий с успехом применяются в задачах, где целевая функция дискретна, недифференцируема или имеет сложный рельеф. Во многих случаях ГА позволяют обнаружить за приемлемое время если не точное оптимальное, то по крайней мере достаточно «хорошее» (субоптимальное) с точки зрения задачи решение [2]. Общей характерной особенностью ГА является очень быстрое уменьшение значений целевой функции в начале работы алгоритма и крайне медленное уточнение найденного решения на его заключительных этапах. В данной работе предлагается один из методов построения регулярной процедуры уточнения решения на заключительных шагах работы алгоритма. Общая идея состоит в том, что процедура кодирования точки  $\bar{x} \in \Pi^n$  некоторой бинарной строкой вместе с целевой функцией  $f$  индуцирует в пространстве поиска ориентированный граф  $G$ . Процедура уточнения найденного решения (которому отвечает текущая вершина графа  $G$ ) может быть реализована как регулярный просмотр всех дуг, исходящих из этой вершины, и выбор перехода по той дуге, которая ведёт в смежную вершину с наименьшим значением целевой функции. На одном шаге такой процедуры требуется просмотр  $n \cdot m$  дуг ( $n$  — размерность задачи,  $m$  — число бит, используемых для кодирования одной переменной).

Автор выражает благодарность А. Н. Соловьеву за внимание к работе.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 10-08-01296-а, 10-08-13300-РТ\_оми), ГК № П401, П487, П596 в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы.

## Литература

1. J. H. Holland. *Adaptation in natural and artificial systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
2. Вороновский Г. К., Махотило К. В., Петрашев С. Н., Сергеев С. А. Генетические алгоритмы, искусственные нейронные сети и проблемы виртуальной реальности. Харьков: Основа, 1997, 112 с.

## Квазистационарные спиральные течения жидкости в кровеносном сосуде

**Батищев В. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

batish@math.rsu.ru

В докладе представлен новый тип спиральных течений крови в артериальных сосудах человека и животных. В публикациях по винтовым течениям жидкости в кровеносных сосудах исследованы два типа спиральных волн — длинные спиральные волны, локализованные вблизи стенок сосудов, и короткие волны, заполняющие все поперечное сечение сосуда, причем часть мод этих волн локализована вблизи оси сосуда. Отметим, что каждая длинноволновая и коротковолновая спиральная мода изменяет направление вращения жидкости на противоположное либо со временем (в течение сердечного цикла), либо в поперечном сечении сосуда возникают области, в которых жидкость вращается в разные стороны.

В докладе представлены спиральные течения жидкости, у которых направление вращения не изменяется ни со временем, ни по сечению. Задача решена на основе системы Навье-Стокса и уравнений тонкой вязкоупругой оболочки, моделирующей цилиндрическую стенку кровеносного сосуда. Рассчитаны течения жидкости, которые могут возникать на фоне среднего стационарного течения и длинных пульсовых волн, распространяющихся вдоль оси сосуда. Уравнение для окружной компоненты скорости содержит в конвективных членах как осевую, так и радиальную компоненты скорости. Главный член асимптотических разложений для этих течений описывает стационарное движение вязкой жидкости, затухающее с ростом осевой координаты. Профиль скорости окружной компоненты имеет максимум, расположенный вблизи среднего сечения между осью сосуда и его стенкой. Декремент затухания оказался малым и пропорциональным кинематическому коэффициенту вязкости. Полученное спиральное течение затухает значительно быстрее, чем пульсовые волны, влияние которых учитывается во втором члене асимптотики. Третий член асимптотических разложений учитывает влияние пристеночного пограничного слоя.

## Длинноволновая асимптотика пульсовых волн в кровеносном сосуде

**Батищев В. А., Ломакин Н. Д.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
batish@math.rsu.ru

Доклад посвящен построению асимптотических разложений решения известной задачи о распространении длинных пульсовых волн в кровеносном сосуде постоянного сечения. Работа вызвана необходимостью расчета коротких спиральных волн асимптотическими методами путем выделения пристеночного колеблющегося пограничного слоя. Задача решается на основе системы Навье-Стокса и линейной теории тонких вязкоупругих оболочек. Уравнения длинных волн в жидкости получены как главные члены разложения решений по степеням малого параметра, зависящего от частоты сердечного цикла, радиуса сосуда и фазовой скорости Моуэнса-Кортевега. Далее применяется метод пограничного слоя путем построения «внешнего» и «внутреннего» разложений. Главное приближение описывает длинные пульсовые волны в идеальной жидкости без дисперсии и затухания и определяет фазовую скорость этих волн. Учет малой вязкости определяет декременты затухания отдельных мод. Подтвержден экспериментальный факт, что амплитуды пульсовых волн постоянны (не зависят от радиальной координаты) в средней части поперечного сечения кровеносного сосуда (вне области пограничного слоя). Рассчитаны две волны, одна из которых — волна давления, фазовая скорость которой близка к скорости Моуэнса-Кортевега. Вторая волна — более длинная, фазовая скорость ее значительно больше фазовой скорости волны давления. Амплитуда второй волны значительно меньше, чем у волны давления вне области пристеночного пограничного слоя, однако в пограничном слое амплитуды обеих волн имеют одинаковый порядок.

## Аберрации высшего порядка при эмметропии и аномалиях рефракции

**Бауэр С. М.\* , Качанов А. Б.\*\* , Корников В. В.\***

*\* Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет*

*\*\* Санкт-Петербург, СПб филиал ГУ МНТК «Микрохирургия глаза»*

s\_bauer@mail.ru

Известно, что качество оптики зависит, в частности, и от аберраций — несовершенств или нерегулярностей оптической поверхности. Появившиеся недавно офтальмологические аберрометры, позволяющие при обследовании определить уровень аберраций различного порядка, а также тотальный уровень аберраций любого глаза, открыли новые перспективы диагностики в офтальмологии. Изучению аберраций низшего порядка уделяли внимание еще с середины XIX века, но аберрации высшего порядка стало возможным изучать только при появлении современных аберрометрических систем. В данной работе анализируются данные, полученные на аберрометре «Wasca» для 230 глаз. Для исследования

наличия различий в аберрациях высших порядков у людей с нормальным зрением (эмметропов) и у людей с аномалиями рефракции (миопия, гиперметропия) из исходной выборки в 230 глаз выделена группа эмметропов (30 глаз), а из оставшихся 200 глаз, случайным образом формировались выборки по 30 глаз у людей с аномалиями рефракции. Сравнение средних по различным критериям позволяет сделать вывод об их равенстве ( $p < 0,05$ ), что дает возможность утверждать, что уровни аберраций высшего порядка практически такие же при эмметропии и аномалиях рефракции. Но показатели аберраций высшего порядка сравниваемых групп различаются их выборочными распределениями. Для группы с аномалиями рефракции выборочное распределение асимметрично, в отличие от аналогичного распределения для людей с нормальным зрением.

### Моделирование локомоций водных животных

**Бекурин Д. Б., Кислухин Н. М., Марценюк М. А.**

*Пермь, Пермский государственный университет*

mamrcn@yandex.ru

В последние годы интенсивно развивается биомеханика локомоций (см., например, [1–5]). Это связано с тем, что подвижность живых существ влияет на многие биологические процессы, включая воспроизводство, инфицирование и экологию водных обитателей. Создание искусственных микромоторов и микродвижителей для биомедицинских целей ставит задачу оптимизации локомоторных циклов, обусловленных деформацией формы пловца, для формирования заданной траектории. Поскольку реальное движение микробов происходит во внутренней среде живого организма, где модель ньютоновской жидкости перестает работать, рассматриваются задачи локомоций в сложном полимерном окружении. Много внимания уделяется гидродинамическому взаимодействию между микробами, что приводит к формированию когерентных структур. Экспериментально реализуется интеграция бактерий с неорганическими микроскопическими объектами (например, с бусиной радиусом 10 мкм), причем бактерии играют роль движителя, обеспечивая транспорт бусины со скоростью 15 мкм/сек.

Целью данной работы является разработка теории плавания самодеформирующихся объектов (частиц) произвольной формы, позволяющей моделировать описанные выше актуальные задачи локомоторных движений живых организмов. Нами получены [7–8] соотношения, которые связывают вектор поступательного смещения  $\delta\mathbf{X}$  и вектор поворота  $\delta\Phi$  частицы как целого с полем векторов деформации поверхности  $\delta\mathbf{u}(p, q)$ . Эта связь выражается через известные триадики (тензоры 3-ранга)  $\Gamma$  и  $\Lambda$ , введенные Х. Бреннером [6]. В результате удается вычислить калибровочный потенциал рассматриваемой задачи и рассмотреть конкретные механизмы локомоций в связи с новой постановкой задач.

### Литература

1. Behkam B., Sitti M. Bacteria Integrated Swimming Microrobots // Lecture Notes in Computer Science, 2007, V. 4850, p. 154–163.



2. Chambrion T., Munnier A. Locomotion and Control of a Self-Propelled Shape-Changing Body in a Fluid. // Journal of Nonlinear Science, Online First, 17 November 2010.
3. Ishikawa T. Suspension biomechanics of swimming microbes. // JR Soc Interface. 2009 Oct 6;6(39): p. 815–834.
4. Lauga E., Powers T. R. The hydrodynamics of swimming microorganisms. // Rep. Prog. Phys. 72 (2009), 096601 (36 pp)
5. Miftahof R.N., Nam H.G. Mathematical foundations and biomechanics of the digestive system — Cambridge University Press — 2010 — 220 pp.
6. Brenner H. The Stokes resistance of an arbitrary particle 4. Arbitrary fields flow // Chem. eng. sci. 1964. V. 19, p. 703–727.
7. Бекурин Д.Б., Марценюк М.А. Теория самодвижения деформирующейся частицы при малых числах Рейнольдса // Гидродинамика: Сб. научн. трудов / Перм. ун-т. — Пермь, 1998. — Вып. 11. — С. 7–44.
8. Бекурин Д.Б., Кислухин Н.М., Марценюк М.А. Компьютерная модель плавления самodeформирующегося тела в вязкой жидкости // Гидродинамика: Сб. научн. трудов / Перм. ун-т. — Пермь, 2004. — Вып. 14. — С. 21–50.

## Двумерные модели реакции переноса протона в молекуле 2-ацетилциклопентан-1,3-диона

**Бердышев Д. В., Гузев М. А.**

*Владивосток, Тихоокеанский институт биоорганической химии ДВО РАН*  
glazunov@piboc.dvo.ru

Исследование колебаний на ангармоничность имеет большое значение при интерпретации колебательных спектров молекул. Если молекула содержит внутри-молекулярные водородные связи, как например 2-ацетилциклопентан-1,3-дион (2-АЦПН), мостиковый атом водорода (протон) может мигрировать между атомами кислорода на расстояние до 1 Å (см. [1]). В этих случаях большое значение имеет исследование динамического взаимодействия между движением по колебательным модам  $\{L_i\}$  и движением по моде  $L_1$ , в наибольшей степени ответственной за перенос протона. В данной работе методом ВЗLYP/6-31G(d) построены двумерные сечения поверхности потенциальной энергии молекулы 2-АЦПН по направлениям, заданными векторами  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$  нормальных колебаний  $\nu_{1,гармонич} = 2980\text{см}^{-1}$ ,  $\nu_{2,гармонич} = 1719\text{см}^{-1}$  и  $\nu_{3,гармонич} = 1663\text{см}^{-1}$ . Последние два колебания наиболее часто используются для отнесения полос в спектрах к различным конформациям молекулы.

Численным методом Арнольди–Ланцоша решены задачи о движении протона в построенных двумерных потенциалах водородной связи  $V(L_1, L_2)$  и  $V(L_1, L_3)$ .

Отнесение состояний по типам колебаний проведено на основе визуального анализа картины расположения узловых линий рассчитанных двумерных волновых функций (ВФ), как было предложено нами в работе [1]. Переход от одномерной к двумерной модели мало меняет необычной особенности колебательного

движения по медленным степеням свободы ( $L_2$  или  $L_3$ ) — так называемым «колебаниям молекулы в карбонильной области» — вплоть до энергий  $E \approx 2$  eV они являются почти гармоническими. Движение же по «быстрой» степени свободы  $L_1$  является существенно ангармоническим, а его взаимодействие с движением по моде  $L_3$ , как это следует из картины расположения узловых линий ВФ для возбужденных состояний, оказывается более сильным, чем взаимодействие с движением по моде  $L_2$ .

Работа выполнена при поддержке грантом ДВО РАН (09-II-CY-03-003).

#### Литература

1. Бердышев Д. В., Гузев М. А., Израильский Ю. Г. Исследование адиабатических потенциалов и квантовых характеристик в  $\beta, \beta'$ -трикетонах // Экологический вестник научных центров ЧЭС, 2010, № 4, с. 13–22.

### Особенности формирования волнового поля при установившихся колебаниях неоднородных сред клиновидного типа

**Беркович В. Н.**

*Ростов-на-Дону, Ростовский филиал Московского государственного университета технологий и управления (МГУТУ)*

bvn119@rambler.ru

В настоящем докладе рассматривается проблема изучения особенностей формирования волновых полей в средах, составленных из жестко сцепленных клиновидных либо усеченно-клиновидных упругих компонент с различными геометрическими и механическими характеристиками в условиях установившихся плоских гармонических колебаний, возбуждаемых на внешних границах этих сред. Ставится задача исследования процесса возникновения поверхностных волн, локализованных на свободных границах и интерфейсных (каналовых) волн, локализованных на границах раздела сред. Исследование возникающих при этом смешанных задач основано на их сведении к эквивалентным граничным интегральным уравнениям, которые далее исследуются.

Для изучения вопросов локализации волнового процесса детально исследуются плоские колебания однородной клиновидной, а также неоднородной клиновидной среды, составленной из 2-х упругих жестко сцепленных клиновидных компонент в условиях плоской деформации при однородных граничных условиях на внешних гранях. Плоские основные задачи динамики упругого клина ранее рассматривались в ряде частных случаев, например, в [1–4] и др. Методом, предложенным автором в [5, 6] на основе использования вариационного подхода, приводящего к обобщенной постановке исходной краевой задачи, удается исследовать проблему возникновения поверхностных и каналовых (интерфейсных) волн в составной клиновидной среде. С помощью специального представления

общего решения уравнений динамической теории упругости получены уравнения для вычисления фазовых скоростей указанных волн и критических углов раствора клиновидных компонент, при которых эти типы волн возникают.

Приведены результаты численного анализа для случаев контакта ряда упругих геофизических сред клиновидного типа.

#### Литература

1. Морозов Н. Ф., Суровцова И. Л. Задача о динамическом нагружении плоских упругих областей с угловыми точками контура. // Прикл. матем. и мех. 1997. Т. 61. № 4. С. 654–659.
2. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука. 1986. 327 с.
3. Исраилов М. Ш. Динамическая теория упругости и дифракция волн. М.: МГУ. 1992. 204 с.
4. Bogy D. B., Wang K. C. Plane steady vibrations of an orthogonal elastic wedge. // J. Elasticity. 1974. V. 4. N. 1.
5. Беркович В. Н. Плоские установившиеся колебания упругой клиновидной среды. // Экол. вестник научн. центров ЧЭС. КубГУ. Краснодар: 2008. № 3. С. 27–36.
6. Беркович В. Н. О локализации волнового процесса в кусочно-однородной клиновидной среде. // Экол. вестник научн. центров ЧЭС. КубГУ. Краснодар: 2010. № 3. С. 26–32.

#### Идентификация вязкоупругих свойств мягких биологических тканей

**Богачев И. В., Ватульян А. О.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

bogachev89@yandex.ru

Моделирование тканей и органов, проведение ортопедических операций на основе замещающих искусственных фрагментов, описание биологических процессов роста, регенерации требует знания механических характеристик тканей. В основе методов исследования всех этих актуальных проблем лежит теория обратных задач. Воздействие на биологические ткани возможно различными способами, причем в связи со спецификой приложений наибольший интерес представляют методы, не разрушающие и не повреждающие ткань. Для идентификации эффективных свойств биологических тканей в настоящее время успешно применяются акустические методы исследования и модели, созданные для упругих, вязкоупругих, пороупругих материалов, в том числе и неоднородных.

В настоящей работе предлагается решение задачи реконструкции неоднородных по толщине механических характеристик вязкоупругого слоя, моделирующего биологическую ткань (кожа, мышцы). Рассмотрены две задачи — о реконструкции характеристик на основе анализа амплитудно-частотных характеристик и на основе изменения резонансных частот пьезокерамического стержня-индентора.

В первом случае с применением преобразования Фурье задача сведена к двум несвязанным задачам относительно осредненных характеристик смещений, на основе метода линеаризации построен итерационный процесс, использующий последовательное решение интегральных уравнений Фредгольма 1-го и 2-го рода. Для решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода использован метод регуляризации Тихонова. Представлены численные результаты восстановления различных законов изменения вязкоупругих характеристик.

Во второй задаче сформулированы модифицированные граничные условия для системы слой-индентор, построены поправки для резонансных частот, на основании которых и производится процедура идентификации.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-01-00194-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы (госконтракт П596) и Южного математического института г. Владикавказ.

## Моделирование конкуренции близкородственных популяций при наличии хищника

**Будянский А. В.\* , Цибулин В. Г.\*\***

*\*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*

*\*\*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

halord@mail.ru

Пространственно-временное моделирование сосуществования популяций в одной экологической нише требует учета миграционных эффектов и пространственно-неоднородной среды обитания.

Для моделирования таких задач полезным оказывается учет возможной косимметрии задачи [1], который позволяет дать трактовку возникновения непрерывных семейств равновесий (стационарных состояний) и медленных установлений при разрушении косимметрии.

Рассматривается модель взаимодействия двух близкородственных популяций жертв и популяции хищника:

$$\dot{u} = \nabla(k_1 \nabla u - \alpha_1 u \nabla p - \beta_1 u \nabla v) + \mu_1 u f_0 - \nu_1 u w, \quad (1)$$

$$\dot{v} = \nabla(k_2 \nabla v - \alpha_2 v \nabla p - \beta_2 v \nabla u) + \mu_2 v f_0 - \nu_2 v w, \quad (2)$$

$$\dot{w} = \nabla(k_3 \nabla w - \beta_3 w \nabla u - \beta_4 w \nabla v) + \mu_3 w u + \mu_4 w v - \nu_3 w. \quad (3)$$

Здесь  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$  — плотности популяций жертв,  $w(x, y, t)$  — плотность популяции хищника.  $k_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  ( $i = 1, 2$ ) и  $k_3$ ,  $\beta_3$ ,  $\beta_4$  — матрицы второго порядка.  $\mu_i$ ,  $\nu_i$ ,  $\mu_3$ ,  $\mu_4$ ,  $\nu_3$  — константы,  $f_0 = 1 - (u + v)/p(x, y)$ , где  $p(x, y)$  — функция обобщенного ресурса.

Система (1)–(3) с краевыми условиями Неймана обладает линейной косимметрией  $L = (\xi_1 v, -\xi_2 u, 0)^T$ , если  $k_1 \xi_1 = k_2 \xi_2$ ,  $\mu_1 \xi_1 = \mu_2 \xi_2$ ,  $\nu_1 \xi_1 = \nu_2 \xi_2$  и  $\alpha_i = \beta_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ . Для численного исследования задачи разработан метод конечных разностей, сохраняющий косимметрию задачи.

Проведены вычислительные эксперименты и изучено формирование стационарных распределений популяций при различных коэффициентах миграции. Найдены условия на параметры системы, при которых возникает непрерывное косимметричное семейство равновесий и возможно сосуществование близкородственных популяций на ареале.

#### Литература

1. Юдович В. И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки, 1991, Т. 49, № 5, С. 142–148.

### Конечноэлементное моделирование процессов вентиляции производственных помещений

**Булыгин Ю. И., Корончик Д. А., Маслов Е. И., Месхи Б. Ч.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
soloviev@math.rsu.ru

Рассматриваются задачи моделирования процессов распространения загрязняющих веществ и избытков теплоты в воздушной среде различных помещений. Источники загрязнения и выделения избытков теплоты могут быть стационарными и передвижными. Общая постановка задачи состоит из многомерного (по количеству компонент) уравнения конвекции-диффузии, уравнений потенциального течения газов и уравнения теплопроводности с соответствующими граничными условиями. Для реализации данной модели разработана программа в пакете FlexPDE для расчета стационарных и нестационарных задач в трехмерной постановке с использованием стационарных и передвижных источников загрязнения и выделения избытков теплоты. Проведены модельные расчеты, расчеты для участка обкатки готовой продукции (Ростсельмаш) и зон технического обслуживания и ремонта (АТП-1). В расчетах рассмотрены помещения различной конфигурации, от простых газовых камер до сложных участков обкатки с большим набором смежных помещений. На основе проведенных вычислений даются рекомендации по рациональному расположению элементов вентиляционного оборудования. Проводится выявление влияния различных зон загазованности на человеческий организм, а также анализ параметров микроклимата, влияющего на здоровье работников исследуемых помещений.

## Оптимальное оценивание напряженно-деформированного состояния и идентификация параметров наблюдаемых конструкций

Бурцева О. А., **Кабельков А. Н.**, Казначеева О. К.

*Новочеркасск, ЮРГТУ (НПИ)*

prof\_kan@mail.ru

На этапе разработки методов качества, оценок прочности и ресурса работы конструкции из композитных материалов повышенной ответственности выполняют теоретические и проводят многочисленные экспериментальные исследования основных ее параметров в различных режимах эксплуатации.

Теоретическое исследование предполагает разработку алгоритма формирования матриц жесткости конечных элементов (КЭ) исследуемой конструкции с учетом физической и геометрической нелинейностей. Рассмотрены модели из упругих, упругопластических и вязкоупругих материалов.

В результате теоретических исследований:

1. решена задача о нахождении напряжений, вызываемых эксплуатационными силовыми, температурными воздействиями и необратимыми структурными деформациями в композитном материале на стадии изготовления;
2. предложен метод определения упругих характеристик армированных композитов, основанный на тензометрировании деформируемых изделий, математическом моделировании системы измерения (СИ) и применении алгоритмов оптимального оценивания состояний деформируемых конструкций. Метод позволяет определять напряженно-деформированное состояние (НДС) конструкции с учетом приближенной информации о статической нагрузке;
3. разработан метод нахождения упругих характеристик на основе оптимально спланированных численных экспериментов.

Задачи решаются в рамках классической теории вариационного исчисления при квадратичных критериях качества оценивания состояний. Матрицы весовых коэффициентов назначаются из условий достижения минимума функционалов или решения двухкритериальной задачи на основе множеств Парето.

Однако любая математическая модель является приближенным описанием конструкции, которое не отражает всех особенностей реологии материалов, неточности изготовления, характеристик внешних воздействий, начальных напряжений и условий опирания. С другой стороны, испытательные стенды и средства измерения деформаций и/или перемещений изделий не безупречны и не могут охватить наблюдениями весь объем конструкции, которая в значительной степени остается неконтролируемой. Кроме того, в экспериментальных условиях не могут быть смоделированы все экстремальные режимы эксплуатации изделий.

В связи с этим проводится сравнение результатов теоретического и экспериментально-численного этапов исследования конструкции, который включает:

1. тензометрирование нагружаемой конструкции;
2. построение конечноэлементной модели «наблюдаемая конструкция — система измерения»;
3. формирование критерия адекватности модели конструкции результатам тензометрирования; серию численных экспериментов по расчету НДС конструкции и расчету сигналов СИ при различных значениях варьируемых параметров;
4. нахождение «оптимальных» значений параметров из условия достижения минимального значения критерия качества — среднеквадратичной погрешности между численными и физическими экспериментами.

В результате экспериментально-теоретических исследований конструкции из углерод-углеродного композита определены его достоверные упругие характеристики.

### Расчет распределения Ge в поверхностных SiGe квантовых точках

**Бычков А. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет  
az710@yandex.ru*

Отличительными чертами процесса формирования квантовых точек являются:

- 1) релаксация упругих напряжений в квантовой точке;
- 2) диффузионные процессы, скорость которых существенно возрастает вследствие разности упругой энергии в смачивающем слое и в квантовой точке [1].

Построены трехмерные модели квантовых точек на свободной поверхности полупроводниковой пленки, состоящей из сплава SiGe. Форма квантовых точек зависит от стадии и режима роста пленки. Рассматриваются два типа квантовых точек, в форме полной и форме усеченной пирамид. Исследовано распределение концентрации Ge в пирамидальных квантовых точках. Релаксация накопленной в процессе роста пленки упругой энергии происходит за счет роста квантовых точек. Пирамидальные квантовые точки имеют форму правильной четырехугольной пирамиды, отношение высоты пирамиды к длине стороны основания равно 0,1. Квантовые точки в форме усеченной пирамиды представляют собой правильную четырехугольную усеченную пирамиду, отношение высоты полной пирамиды к длине стороны основания равно 0,25, усеченной — 0,2. Потеря устойчивости равновесия плоской пленки определяется сменой знака приращения свободной энергии участка поверхности пленки [2]. Расчет упругих деформаций выполнен с использованием метода конечных элементов (пакет FlexPDE). Для расчета распределения Ge использованы аппроксимирующие формулы и итерационный алгоритм [3]. Во всех расчетах подложка предполагалась недеформируемой. Упругие перемещения заданной области малы по сравнению с амплитудами возмущений и не учитывались для определения формы свободной поверхности пленки. Расчет показал, что атомы Ge концентрируются в вершинах квантовых точек. Перераспределение Ge обеспечивает существенную релаксацию упругой энергии в сплаве SiGe.

## Литература

1. Овидько И. А., Шейнерман А. Г. Наномеханика квантовых точек и проволок. СПб, «Янус», 2004. 165 с.
2. Бычков А. А., Карпинский Д. Н. Влияние процессов релаксации на форму поверхности полупроводниковой пленки на подложке // Актуальные проблемы прочности: сборник трудов XLVIII Международной конференции, посвященной памяти М. А. Криштала. Тольятти: ТГУ, 2009. С. 220–221.
3. Digiuni D., Gatti R., Montalenti F. Aspect-ratio-dependent driving force for nonuniform alloying in Stranski-Krastanow islands // Physical review, 2009. V. 80. 155436.

О моделях пороупругости и их приложениях к изучению свойств биологических тканей

**Ватulyян А. О., Ляпин А. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*vatulyan@math.rsu.ru*

При исследовании различных задач об акустическом зондировании биологических тканей весьма часто используются модели пористоупругих насыщенных жидкостью сред. В работе проанализированы наиболее употребительные формулировки, представлены достоинства и недостатки известных моделей. Отметим, что для анализа простейших задач в рамках этой модели необходима корректная формулировка граничных условий, которая может быть получена из некоторого вариационного уравнения. В настоящей работе для модели, в которой состояние среды характеризуется вектором смещений скелета и давлением жидкости в порах, представлен способ построения функционала, из стационарности которого вытекают уравнения колебаний и граничные условия для пористоупругого тела. На основе этого функционала представлены постановки модельных задач о колебаниях пористоупругих неоднородных одномерных структур. Проведен анализ амплитудно-частотных характеристик данных задач и изучено влияние пористости, физических характеристик на величину собственных частот и амплитуду колебаний тела.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-01-00194-а), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы (госконтракт П596) и частичной поддержке Южного математического института (г. Владикавказ).



## Задача о кручении цилиндра с ромбоэдрической анизотропией

**Ватульян К. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

vatulyan\_karina@mail.ru

Представлено решение задачи о кручении цилиндра с ромбоэдрической анизотропией. Задача сведена к краевой задаче на сечении, на основе МКЭ построено численное решение для случая прямоугольного поперечного сечения.

Для эллиптического поперечного сечения получены точные формулы для компонент перемещений в виде полиномов второй степени. Особенностью полученного решения по сравнению с классическим решением для изотропного стержня является то, что в формулах для смещений  $u_1$  и  $u_2$  имеются дополнительные слагаемые, пропорциональные модулю  $c_{14}$ ; выражение для смещения  $u_3$ , характеризующего деформацию сечения стержня, не зависит от этой постоянной и имеет такой же вид, как и в случае стержня из изотропного материала; у стержня с круговым сечением в рассматриваемом случае анизотропии деформация отсутствует.

## Процессы массопереноса в высыхающих каплях биологических жидкостей

**Водолазская И. В., Исакова О. П., Тарасевич Ю. Ю.**

*Астрахань, Астраханский государственный университет*

tarasevich@aspu.ru

Структуры, образующиеся при высыхании биологических жидкостей, привлекли внимание исследователей по крайней мере полвека назад. Особый интерес представляет высыхание капель биологических жидкостей, при котором происходит перераспределение компонентов: белок накапливается преимущественно по краям капли, а соль почти равномерно распределяется по диаметру капли. Если объемная доля коллоидных частиц велика, то при высыхании капли на ее краю формируется твердый валик. Ширина валика зависит как от концентрации белка, так и от концентрации соли.

В медицине для целей экспресс-диагностики активно применяется метод «клиновидной дегидратации», позволяющий на основании анализа структур, образовавшихся при высыхании капли биологической жидкости (например, сыворотки крови), выявлять широкий набор различных заболеваний.

Нами предложена модель, позволяющая описывать динамику формы высыхающей сидячей капли коллоидного раствора. Модель отличается от известных тем, что в ней была учтена зависимость вязкости коллоидного раствора от концентрации коллоидных частиц. Основное внимание было сосредоточено только на второй стадии высыхания капли, когда на ее краю возникает твердая фаза (гель, стекло), система становится двухфазной, происходит движение фазового фронта к центру капли.

В безразмерном виде основные уравнения модели имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} = \mathbf{f},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} h \\ \langle C \rangle \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -\frac{h}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle u \rangle) - EJ \\ E \frac{\langle C \rangle J}{h} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $r$  — радиальная координата,  $t$  — время,  $\langle C(r, t) \rangle$  — усредненная по высоте концентрация коллоидных частиц,  $h(r, t)$  — профиль свободной поверхности капли,  $\langle u(r, t) \rangle$  — усредненная по высоте капли горизонтальная составляющая скорости жидкости,  $E$  — параметр испарения. Особенностью нашей модели является то, что вязкость жидкости  $\eta(r, t)$  зависит от концентрации коллоидных частиц в растворе и меняется в пространстве и времени.

Мы полагаем, что плотность потока пара  $J(r, t)$  обращается в ноль на границе фаз, т. е. когда концентрации коллоидных частиц достигает значения, соответствующего переходу системы в твердое состояние (гель или стекло). Такое предположение является удобным приемом, позволяющим исключить из рассмотрения твердую фазу капли.

Конечный профиль капли, полученный в результате проведения расчетов для значений параметров капли альбумина сыворотки крови человека, вполне соответствует экспериментальным наблюдениям. Предложенная модель может быть использована для предсказания формы осадка в зависимости от начальной концентрации коллоидных частиц и режима испарения. На ее основе может быть построена модель для описания трехкомпонентной системы соль–белок–вода, представляющей наибольший интерес в связи с медико-биологическими задачами.

## Биомеханический подход к изучению функционирования билиарной системы в норме и при патологии

**Гаврилов В. А.\***, **Кучумов А. Г.\*\***, **Самарцев В. А.\***, **Шумихина Т. В.\*\***

\* *Пермь, Пермская государственная медицинская академия*

\*\* *Пермь, Пермский государственный технический университет*

kuchymov@inbox.ru

Организм человека вследствие сложной иерархии биологических объектов (молекул, клеток, тканей и органов), образующих взаимосвязанные функциональные системы, считается одним из самых затруднительных предметов научного исследования. Таким образом, комплексный подход к изучению отдельных систем и органов человека с помощью многоуровневого моделирования и учета индивидуальных физиологических и анатомических особенностей является актуальной задачей междисциплинарных исследований.

Билиарная система (система, отвечающая за продуцирование, хранение и транспортировку желчи) включает в себя печень, систему желчных протоков, желчный пузырь, сфинктерный аппарат.

По пути следования желчи из печени в двенадцатиперстную кишку находится система сфинктеров, которые предназначены регулировать хранение и использование желчи. Желчь из печени поступает в желчные протоки, но попасть из них в двенадцатиперстную кишку не может, поскольку сфинктер Одди плотно закрыт. Желчный пузырь начинает расширяться и создавать давление, при котором желчь попадает не в кишку, а в желчный пузырь, где и хранится до того момента, когда человек начинает принимать пищу. Когда в желудок поступает пища, происходит открытие сфинктера Одди и сокращение желчного пузыря. При сжатии пузырь выталкивает желчь в общий желчный проток, откуда она свободно попадает в кишечник. Когда пузырь опорожнен, но прием пищи продолжается, желчь из печени попадает прямо в двенадцатиперстную кишку.

Нарушения моторных функций желчного пузыря и желчных протоков может привести к образованию камней.

Целью данной работы является обоснование роли биомеханики в построении модели билиарной системы. Модель будет основана на методах вычислительной биомеханики, использовании экспериментальных данных о биологических объектах, входящих в систему, МРТ-снимках, определяющих уникальную анатомию пациента, а также многоуровневом моделировании.

## Численное моделирование закрученных течений в стенозированном кровеносном сосуде

**Гатаулин Я. А., Смирнов Е. М., Юхнев А. Д.**

*Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский политехнический университет  
yakov\_gataulin@mail.ru*

Известно, что чаще всего атеросклероз развивается в областях артериальных сосудов с гемодинамическими или морфологическими нарушениями, например, в области стеноза. Образованию атеросклеротических бляшек способствуют малые по величине касательные напряжения у стенки сосуда. На локальные значения касательных напряжений может оказывать влияние закрутка потока крови, о наличии которой свидетельствуют современные гемодинамические исследования [1, 2].

В работе представляются результаты численного анализа закрученного стационарного течения вязкой жидкости в модели сосуда со стенозом — жесткой трубке диаметром 6 мм и асимметричным 50%-м местным сужением, расположенным на расстоянии 7 калибров от входа. На входе в трубку задавалось распределение скорости, соответствующее квазитвердому вращению, с расходной скоростью 40 см/с, на выходе (13 калибров за стенозом) ставилось условие постоянного давления. Число Рейнольдса составляло 600. Угол начальной закрутки потока варьировался в диапазоне от 0 до 20°, что соответствует данным по физиологии человека. Задача решалась с использованием программного пакета ANSYS CFX.

Установлено, что интенсивность закрутки наиболее резко уменьшается по длине трубки в области стеноза. При начальном угле закрутки в  $20^\circ$  длина застойной области за стенозом уменьшается примерно на 25% и заметно смещается по направлению спиральных линий тока жидкости. Общий уровень касательных напряжений на стенке в застойной области увеличивается по модулю на 20%. Примечательно также, что ниже по потоку появляется вторая застойная область.

Работа выполнена в рамках проекта У.М.Н.И.К. 8058 R/11233 Фонда содействия развитию МП НТС.

#### Литература

1. Куликов В. П., Кирсанов Р. И., Засорин С. В. Допплерографическая регистрация феномена винтового движения крови в общих сонных артериях у людей // Ультразв. и функц. диагностика. — 2006. — №2. — С. 96–100.
2. Устинов Ю. А. Модель винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах // Докл. РАН. — 2004. — Т. 398, №3. — С.71–76.

### Перспективы внедрения образовательных инициатив Microsoft и Softline на мехмате ЮФУ

**Герасименко Т. Е., Надолин Д. К., Надолин К. А., Цывенкова О. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

olgaz@math.sfedu.ru

Представленный доклад носит информационный характер и содержит обзор некоторых образовательных инициатив компании Microsoft — признанного мирового лидера в разработке программного обеспечения и корпоративных IT-решений не только для бизнеса, но и для всех сфер общественной деятельности.

Корпорация Microsoft в последнее время уделяет особое внимание информатизации сферы образования — от дошкольного до вузовского. Комплексные IT-решения Microsoft для вузов включают программные продукты и технологии, удовлетворяющие информационные потребности по всем направлениям деятельности: обучение; научно-исследовательская работа; управление; совместное общение и работа. Важным дополнением к предлагаемым технологиям являются разнообразные программы и инициативы Microsoft, проводимые корпорацией как самостоятельно, так и через своих российских партнеров, крупнейшим из которых является компания Softline. Мехмат ЮФУ уже в течение ряда лет участвует в таких программах, как MSDN AA и Microsoft IT-Academy.

Кратко перечислим другие программы и инициативы, которые компания Microsoft развивает в последнее время:

- Учебный портал «Твой курс» направлен на повышение компьютерной грамотности населения. Здесь можно не только оценить текущий уровень своих знаний, но и получить рекомендации по подходящей стратегии своего обучения, выбирая учебные курсы для начинающих или опытных пользователей. Среди учебных материалов, курсов и стратегий обучения имеются специально подобранные и адаптированные для студентов, преподавателей, IT-специалистов. Рекомендуются траектории обучения и схемы действий, подготовленные специально для групп обучающихся различного профиля и уровня компьютерной грамотности.
- Ресурсный центр Microsoft адресован преподавателям, аспирантам, студентам и энтузиастам, преподающим и изучающим современные информационные технологии. Здесь размещены учебные курсы, разработанные в университетах и учебных центрах, использующих технологии Microsoft в своем учебном процессе. Представленные материалы могут быть использованы как для самостоятельного изучения, так и для постановки и внедрения собственных курсов.
- Интернет-портал дистанционного обучения e-Teaching содержит самые современные программы и материалы по эффективному применению информационных технологий в работе учителей и преподавателей, включая презентации и видеоуроки.
- Интернет-пространство Live Meeting Space для организации виртуальной работы преподавателя со студентами, включая использование мультимедийных материалов, разнообразные возможности для общения (прямые видеотрансляции, видеозаписи, чаты, слайды, общение по протоколу VoIP или через телефонную сеть общего пользования, а также общий доступ к приложениям и средства для сбора отзывов аудитории.)

Перечисленные и другие образовательные инициативы корпорации Microsoft могут с успехом использоваться в учебном процессе вуза и в частности на факультете математики, механики и компьютерных наук ЮФУ.

## Численно-математическая модель процесса охлаждения элементов радиоэлектронной аппаратуры

**Глазунова Л. В.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
soloviev@math.rsu.ru

В связи с постепенным наращиванием мощностей излучения в радиоэлектронной аппаратуре (далее РЭА) при общей тенденции к ее миниатюризации возникла потребность в разработке более эффективных систем теплообмена для ее обслуживания. Одним из способов решения этой проблемы является математическое моделирование в САЕ-программах. В работе с помощью такого моделирования решается задача расчета параметров системы термостабилизации для обеспечения бесперебойной работы одного из элементов РЭА.

Основной функцией системы термостабилизации является обеспечение управляемого температурного режима во внутреннем объеме блока при изменении внешних температур в широком диапазоне.

Блок обработки приемного сигнала с системой термостабилизации типа «воздух — жидкость» входит в состав бортовой аппаратуры летательных аппаратов. Задачей конструктора блока является оптимизация конструкции с целью обеспечения неизменности параметров измерения при дестабилизирующих климатических воздействиях, интенсивность которых связана с условиями эксплуатации, при минимизации материалоемкости и сокращении номенклатуры элементов и материалов. В частности, температура кристалла интегральной микросхемы не должна превышать плюс  $70^{\circ}\text{C}$  при атмосферном давлении в диапазоне 150 — 450 мм рт. ст., температуре окружающего воздуха от  $-50$  до  $+65^{\circ}\text{C}$ , влажности воздуха 98%.

Инструментом для моделирования процесса термостабилизации в работе был выбран пакет SolidWorks — одна из систем, инструменты для моделирования механической части РЭА которой дополняются специальными приложениями, позволяющими проводить теплотехнические и прочностные расчеты.

Цель исследования: на основе моделирования процесса термостабилизации блока в SolidWorks дать оценку эффективности охлаждения и нагрева для различных режимов эксплуатации тепловыделяющих элементов системой термостабилизации типа «воздух — жидкость»; логико-математический выбор устойчивых компромиссов для удовлетворения противоречивых требований технического задания по назначению и надежности исследуемого объекта.

В работе проведен численный эксперимент, в результате которого определены некоторые геометрические и конструктивные параметры блока, предложен более рациональный выбор материалов конструкции, типа теплоносителя и скорости его движения.

Автор выражает благодарность А. Н. Соловьеву за внимание к работе.

## Теоретические и экспериментальные исследования динамической реакции и волноводных свойств биологических и композитных материалов

**Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Голуб М. В., Еремин А. А.**

*Краснодар, Кубанский государственный университет*

evg@math.kubsu.ru

Традиционные динамические контактные и волновые задачи механики возникают в биологии и медицине при исследовании мягких тканей виброинденторами и при ультразвуковой томографии внутренних органов. Отличительной особенностью биоматериалов является усложненность их механических параметров, например, предельные значения коэффициента Пуассона, наличие ориентированных волокон, обуславливающих сильную анизотропию упругих свойств, вязкость, флюидонасыщенность и др. Сложными физико-механическими свойствами обладают также и современные композитные материалы и пьезопокрытия, использующиеся в авиастроении и микроэлектронике. Тем самым, имеется

насушная необходимость развития традиционных и разработки новых методов решения волновых и контактных задач, применимых для таких материалов. Особое (практическое) значение имеет их экспериментальная верификация и разработка на этой основе методов идентификации параметров материалов и внутренних неоднородностей (дефектов) по данным волнового мониторинга.

В данном докладе планируется рассказать о проведенной в кооперации с российскими и немецкими коллегами экспериментальной верификации ряда методов, разработанных для решения указанных выше задач, в частности,

- определения динамической контактной жесткости биотканей (Е. Тиманин, ИПФ, Н. Новгород)
- возбуждения (в том числе селективного) и регистрации бегущих волн пьезонакладками (W. Seemann, D. Kern, ITM, Karlsruhe)
- идентификации параметров анизотропных композитных пластин по регистрируемым колебаниям, а также моделирования процессов возбуждения, распространения и дифракции нормальных мод, возбуждаемых пьезоактуаторами, в таких структурах с дефектами (R. Lammering, H. Schmidt University, Hamburg)
- экспериментальной проверки явления резонансного захвата волновой энергии в упругой пластине с внутренней трещиной (отслоением) (С.-Р. Fritzen, J. Moll, Siegen University).

## Расчет стратификации плотности и скорости звука по данным океанографических атласов

**Григоренко К. С.\* , Курбатова Н. В.\*\***

*\*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*

*\*\*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

soloviev@math.rsu.ru

Исследование волновых движений в океане опирается на стратификации плотности, которая строится на основе некоторых полуэмпирических формул по гидрологическим данным (распределение температуры, солености и т. п.) Известен ряд океанографических атласов, в которых представлены данные о распределении солености, температуры и других характеристик по глубине в различных точках измерения. Следует отметить, что зачастую эти данные имеют разнородную структуру, связанную с глубиной пространственным шагом измерений, как по глубине, так и в горизонтальных направлениях. При использовании таких гидрологических данных возникает проблема их осреднения и получения данных одинаковой структуры для выбранной акватории. Второй проблемой является выбор соотношений, как правило, эмпирических, для расчета стратификации плотности или скорости звука. Для автоматизации этих вычислений разработана программа в среде Matlab 7.0.1, входной информацией для которой

служит набор файлов, в каждом из которых находится распределение гидрологических данных в определенной точке рассматриваемого района, подготовленный на основе базы данных используемого атласа. Пользователь программы задает количество таких данных и шаг дискретизации по глубине. С помощью разработанной программы проведены расчеты для перспективного района добычи углеводородов в Баренцовом море. На первом этапе были взяты характеристики температуры и солености в определенных точках, произведены операции по осреднению и расчету плотности по формуле  $UC - 80$ . На следующем этапе были рассчитаны промежуточные характеристики, такие, как, например, частота Вайсяля-Брента, необходимая для решения краевых задач и определения параметров внутренних волн. Разработан интерфейс программы с конечноэлементным пакетом, используемым для определения характеристик внутренних волн.

Авторы выражают благодарность А. Н. Соловьеву за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГК № 14.740.11.0202 в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы.

### Исследование квазипериодических нелинейных внутренних волн в непрерывно стратифицированном океане

**Григоренко К. С.\*, Соловьева А. А.\*, Хартиев С. М.\*\***

*\*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*

*\*\*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*soloviev@math.rsu.ru*

Проводимые в океане наблюдения на мелководье, а также в слоях скачка плотности очень часто обнаруживают отклонения волновых возмущений от синусоидальной формы. В этом случае возникают различные нелинейные эффекты, обусловленные неровностями дна и большими, сравнимыми с глубиной, амплитудами внутренних волн.

Учитывая данные эффекты, из нелинейных уравнений Эйлера в рамках приближений квазистатики, Буссинеска и твердой «крышки» аналитически получено необходимое условие существования внутренних волн в непрерывно стратифицированном море переменной глубины:

$$T > N_{\max}^{-1} \quad (1)$$

Здесь  $N(z)$  — частота Вайсяля-Брента (функция глубины);  $T$  — характерный период внутренних волн.

Оценка (1) найдена для класса квазипериодических нелинейных волновых возмущений, имеющих замкнутые траектории движения частиц жидкости (трохоидальный характер движения). Она является аналогом необходимого условия существования монохроматических внутренних волн, полученного в рамках линейной теории для моря постоянной глубины.



Найденное условие (1) не содержит в явном виде дисперсионные зависимости  $T(\lambda)$ , которые в линейной теории накладывают ограничения, связанные с дискретностью спектра собственных значений линеаризованной краевой задачи, описывающей модальный состав внутренних волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГК № 14.740.11.0202 в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы.

## Реконструкция малой полости в цилиндре

**Денина О. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*  
olga\_rostov1983@mail.ru

Актуальность задач обнаружения и локализации дефектов в конструкциях различного назначения обусловлена фактической природой дефектов, являющихся концентраторами напряжений и, в значительной степени, снижающих несущую способность конструкций. Исследование колебаний тел с локализованными неоднородностями позволяет выявить влияние неоднородностей такого рода на динамическую концентрацию напряжений, а также прогнозировать разрушение конструкций на ранних стадиях, что в свою очередь ставит рассматриваемую задачу в ряд наиболее актуальных задач современной механики.

В работе рассмотрены обратные задачи реконструкции полостей различной конфигурации (сферических, эллипсоидальных, цилиндрических) малого относительного размера в упругом изотропном цилиндре при анализе его продольных и изгибных колебаний. При использовании методов теории возмущений получены асимптотические формулы для определения параметров полости по информации о поправках к резонансным частотам. Проведена серия вычислительных экспериментов. В качестве входной информации были использованы значения резонансных частот, рассчитанных с использованием конечноэлементного пакета Ansys 11. Была создана программа на макроязыке APDL для расчета собственных частот в цилиндре в зависимости от положения и конфигурации полости. Результаты проведенных вычислительных экспериментов свидетельствуют об эффективности представленного алгоритма.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований №10-01-00194-а и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы (госконтракт П596).

Моделирование напряженно-деформированного состояния геологических структур с разломами методами блочного элемента и дифференциальной факторизации.

Диденко А. В.\*, Никитин Ю. Г.\*\*\*, Сыромятников П. В.\*

\*Краснодар, Южный научный центр РАН

\*\*Краснодар, Кубанский государственный университет

Didenkoav2011@yandex.ru

Актуальной на сегодняшний день является проблема оценки сейсмичности в зонах, имеющих сложный ландшафт и разломы. Для исследования данной проблемы в работе развиваются методы расчета напряженного состояния литосферных плит как деформируемых твердых тел, подвергающихся внешним воздействиям различного происхождения. Предлагаемый подход основан на применении для моделирования литосферных плит территорий с разломами родственных методов дифференциальной факторизации [1] и блочного элемента [2]. Территория с разломами рассматривается как горизонтально ориентированная блочная структура, в которой блоки разъединены разломами.

Точную математическую модель, воспроизводящую территорию любого крупного региона, на сегодняшний день построить невозможно по многим объективным причинам, поэтому целесообразно построение упрощенной модели.

Малая относительная средняя толщина земной коры позволяет в качестве модели литосферных плит приближенно принять модель мембран, находящихся под действием нормальных сил, действующих сверху и снизу. В процессе этих воздействий возникают силы натяжения, характеризующие напряжения в срединной плоскости литосферной плиты. Уравнение, описывающее в данном приближении литосферную плиту, имеет вид неоднородного анизотропного уравнения Гельмгольца относительно вертикального смещения мембраны. Граничные условия учитывают возможность изменения углов наклона мембраны на границе. Данная модель позволяет оценивать параметры напряжений, лежащих в касательной плоскости блоков.

Получены внешние формы, функциональные и псевдодифференциальные уравнения, соответствующие граничным задачам в каждом блоке, системы уравнений для совокупности взаимодействующих блоков, интегральные представления решений для каждого блока.

Для принятой модели реализован численный алгоритм, который позволяет рассчитывать взаимодействие нескольких десятков блоков.

Проведены модельные расчеты, как для отдельного блока, так и для совокупности из нескольких блоков, позволяющие делать качественные и количественные оценки напряженно-деформированного состояния взаимодействующих литосферных плит. Адекватное моделирование территорий с разломами требуют задания геометрической структуры разломов и введения механических параметров среды в каждом блоке, что технически вполне осуществимо.

Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ и администрации Краснодарского края (09-08-96522-р-юг-а, 09-08-00294-а, 09-08-96527-р-юг-а, 09-08-00170-а), программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

## Литература

1. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Зарецкая М. В., Павлова А. В. Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры // ДАН, 2009, Т. 424, № 1, с. 36–39.
2. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. О методе блочного элемента // МТТ, 2010, № 3, с. 155–163.

К определению физических характеристик неоднородной  
пьезокерамики

**Дударев В. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
dudarev\_vv@mail.ru

Определение свойств биологических материалов является основополагающей задачей биомеханики. Методы неинвазивной диагностики дают наиболее адекватные и точные данные о структуре и свойствах живой материи, поскольку не нарушают биологические процессы. Развитие индустрии изготовления пьезоматериалов и современной микрохирургии позволяет проводить исследования, основанные на прямом и обратном пьезоэффекте. Акустический метод считается одним из эффективных методов неразрушающей диагностики свойств неоднородных материалов.

В работе формулируется задача об определении закона изменения модуля податливости пьезокерамического стержня по данным об амплитудно-частотных характеристиках граничных полей. На основании общих соотношений и уравнения движения осуществлено сведение прямой задачи к решению уравнения Фредгольма второго рода. Реализовано численное решение прямой задачи с использованием составной квадратурной формулы Симпсона на языке Fortran для пьезокерамического стержня с неоднородными свойствами. Проведен анализ влияния величины модуля податливости на амплитудно-частотные характеристики пьезокерамического стержня при продольной поляризации. Обратная задача об определении закона изменения модуля податливости в стержне сведена к решению уравнения Фредгольма первого рода. Численное решение обратной задачи осуществлено в процессе конечного числа итераций с использованием метода А. Н. Тихонова. Представлены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению закона изменения модуля податливости.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (10-01-00194) и в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы (госконтракт П596).

## Моделирование нелинейного ангармонического взаимодействия осесимметричных нормальных волн в упругом цилиндре

**Елагин А. В., Сторожев В. И.**

*Донецк, Донецкий национальный университет*

stvi@i.ua

Результаты исследований эффектов нелинейного взаимодействия при распространении нескольких упругих волн в деформируемых волноводах используются в принципиальных схемах работы ряда акустоэлектронных устройств [2]. Анализ данных эффектов в полях нормальных упругих волн осуществлен применительно к сдвиговым и продольно-сдвиговым нормальным волнам в кристаллическом упругом слое [3]. Отдельные аспекты вопроса о взаимодействии нормальных упругих волн в цилиндре рассматриваются в работе [5].

В данной работе подходы, описанные в [1, 4], применяются при исследовании взаимодействия нелинейных вторых гармоник для двух осесимметричных нормальных упругих волн крутильного и продольно-сдвигового типа, одновременно возбуждаемых в изотропном цилиндре кругового сечения со свободной либо закрепленной боковой поверхностью. Используемая модель нелинейного динамического деформирования цилиндра с учетом эффектов геометрической и физической нелинейности основывается на представлении упругого потенциала Мурнагана с квадратичными и кубическими членами по деформациям. На первом этапе определяются представления для амплитудных функций первых линейных гармоник нормальных волн в цилиндре. Представления для комплексных функций волновых перемещений в нелинейном ангармоническом возмущении получены в виде трех слагаемых, соответственно характеризующих нелинейные вторые гармоники с удвоенными круговыми частотами для двух рассматриваемых линейных волн, а также вторую гармонику «комбинационного типа» с частотой, равной сумме частот линейных нормальных волн, генерируемую вследствие нелинейного взаимодействия. Амплитудные функции радиальной координаты в этих представлениях являются суммой общих решений однородных систем волновых и частных решений, построенных в виде степенных рядов с использованием соответствующих представлений функций Бесселя. Для коэффициентов этих рядов получены рекуррентные формулы.

Численные исследования отдельных характеристик степени нелинейного взаимодействия двух бегущих нормальных волн, принадлежащих первой и второй действительным ветвям соответствующих дисперсионных спектров, проведены применительно к волноводу из дюралюминия.

### Литература

1. Єлагін О. В., Сторожев В. І. Нелінійні ангармонічні збурення при розповсюдженні осесиметричних поздовжньо-зсувних нормальних хвиль в пружному циліндрі // Вісник Донецького університету. Сер. А: Природничі науки. — 2010. — Вип. 2. — С. 77–83.

2. Красильников В. А., Лямов В. Е. Нелинейное взаимодействие упругих волн в кристаллах и обработка сигнальной информации // Акуст. журнал. — 1973. — Т. 19, Вып. 5. — С. 801–804.
3. Куренная К. И. Взаимодействие нелинейных нормальных Р-SV-волн в монокристаллическом слое кубической системы // Вісник Донецького університету. Сер. А: Природничі науки. — 2004. — Вип. 1. — С. 144–151.
4. Storozhev V. I., Yelagin A. V. Nonlinear second harmonics axisymmetric waves of torsion in a cylindrical waveguide with clamped surface // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. — 2010. — Вип. 14. — С. 347–353.
5. Sugimoto N., Hirao M. Nonlinear mode coupling of elastic waves // J. Acoustical Society of America — 1977. — Vol. 62, N 1. — P. 23–32.

## Дискретная математика для биоинформатиков

**Ерусалимский Я. М.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
dnjme@math.sfedu.ru

Биоинформатика — сравнительно молодая «стыковая» наука. Подготовка биоинформатиков осуществляется в магистратуре из бакалавров биологии, математики, ИТ. Первые имеют слабую подготовку в области компьютерных наук, вторые и третьи — плохо знакомы с предметной областью биоинформатики.

Разработано учебное пособие «Дискретная математика для биоинформатиков», предназначенное для магистров-биоинформатиков. Основное внимание в пособии уделено комбинаторике, графам и их возможным применениям. Главным мы считали не формулы, а методы и комбинаторный образ мышления, ведущий к генерации комбинаторных объектов.

## Оптимизация модели пьезодвигателя на основе крутильных колебаний

**Ефременко О. Ю., Чумакова Е. С.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
kate2811rsu@yandex.ru

Прогресс в изучении эффектов взаимодействия механических и электрических полей приводит к тому, что в настоящее время широко используются приборы, принципы работы которых основываются на этих эффектах. С этой целью, как правило, используют радиальные, изгибные, толщинные и другие колебания пьезокерамических тел, однако, интересным и малоизученным является процесс преобразования электрической энергии в крутильные колебания. Источником кручения могут служить либо свойства самого материала, например, наличие винтовой анизотропии, либо винтовая геометрия тела. Второй подход представляется более приемлемым для оптимизации модели пьезодвигателя с практической и конструктивной точек зрения.

В данной работе в качестве объекта исследования выбирается пьезоэлемент, поляризованный по толщине и повторяющий форму закрученного стержня со сложным поперечным сечением.

Для моделирования пьезодвигателя был создан комплекс программ для конечноэлементного пакета ANSYS на языке APDL. Построена параметрическая модель, проведены расчеты частот крутильных колебаний, коэффициента электромеханической связи и амплитудно-частотных характеристик, а так же исследовано напряженно-деформированное состояние.

## Исследование численных методов оптимизации конструкций

**Жиляев И. В.\* , Шевцова В. С.\*\* , Шевцова М. С.\***

*\*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*

*\*\*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет  
barbaragen4@mail.ru*

Последнее десятилетие отмечено повышенным интересом к оптимизации геометрии и топологии механических конструкций, оказывающей большое влияние на их производительность.

Под оптимизацией топологии понимают создание структуры подвергаемой заданным нагрузкам конструкции, при которой достигаются наилучшие эксплуатационные показатели (прочность, жесткость) при ограничениях на размеры, форму или вес.

Реализация задачи оптимизации включает в себя следующие шаги: выбор подходящей референтной области, фиксированных и движущихся границ; построение конечноэлементного представления механической системы; расчет массы используемого материала, узловых перемещений, требуемой энергии податливости или деформации конструкции, проверку удовлетворения ограничений и построение новой модели.

К основным методам оптимизации топологии относят SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization), Level Set метод, RBF (метод радиальных базисных функций) и др. Основная цель представленной работы — сравнительное исследование SIMP и Level Set методов, применяемых для оптимизации псевдодвумерных структур крыльев летающих насекомых.

Крылья насекомых можно рассматривать как достаточно простые структуры, оптимизированные природой в ходе эволюции, и поэтому идеально подходящие для тестирования методов оптимизации. Крыло насекомого представляет собой тонкую двухслойную мембрану, поддерживаемую рядом склеротизированных жилок, расположенных вдоль и поперек крыла. В экспериментальной части нашего исследования высушенные и свежие крылья прямокрылых использовались для цветной 3D сканирующей микроскопии с помощью анализатора VK-9700 Gen II. Благодаря возможности бесконтактного измерения были получены форма и размеры жилок, которые затем сравнивались с результатами численной оптимизации.

В численных экспериментах использовалась КЭ 3D-модель крыла с различным распределением аэродинамических сил, действующих в разные периоды

взмаха крыла. Затем были сопоставлены два метода оптимизации топологии: SIMP метод, обеспечивающий параметризацию функции моделирования в виде так называемых псевдо-плотностей, принимающих значения, близкие к единице (материал) и к нулю (область без материала); и Level set метод, где минимизируемая податливость выражается в виде level set-функции, являющейся решением уравнений типа Гамильтона-Якоби. Эти уравнения описывают движение границы раздела материала и области пустот.

Результаты показали, что для оптимизации грубых структур больше подходит высокая скорость работы и стабильность Level Set метода. Однако для оптимизации тонких структур Level Set методом очень трудно построить начальное распределение level set функции. Преимущества этого метода: низкая чувствительность к конечноэлементному разбиению; при его использовании практически не возникает проблемы «шахматной доски».

SIMP метод менее продуктивен и более зависим от конечноэлементной сетки. Однако он позволяет оптимизировать топологию ажурных объектов типа крыльев насекомых. В целях исключения проблемы «шахматной доски» была сформулирована задача с дополнительным уравнением диффузионного типа для заполнения малых пустот в материале.

В работе была получена группа структур, оптимизированных в конечноэлементном пакете COMSOL Multiphysics, и сделаны выводы о целесообразности двух методов оптимизации для получения удовлетворительных результатов.

## Численное моделирование массопереноса в сверхмелком протяженном русловом потоке

**Жиляев И. В., Надолин К. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

nadolin@math.sfedu.ru

В работе представлены результаты сравнения данных, полученных прямым численным моделированием в конечноэлементном программном пакете COMSOL на основе полных уравнений гидродинамики и массопереноса в двумерном потоке вязкой жидкости, и результатов, полученных на основе предложенной редуцированной математической модели сверхмелкого протяженного потока. Ключевым моментом в редуцированной модели является учет того, что размеры поперечного сечения русла в вертикальном и горизонтальном направлениях существенно различаются и протяженность потока весьма велика.

Для прямого численного моделирования использовался конечноэлементный программный комплекс COMSOL Multiphysics, позволяющий проводить расчет гидродинамических течений и процессов теплопереноса, включая задачи со свободной границей. Был проведен расчет ламинарных и турбулентных течений в области со свободной границей и соотношением длины к глубине 25:1. Расчет проводился с использованием треугольной сетки, содержащей более 18 тысяч конечных элементов, подвижной вблизи свободной границы.

Для численного решения задачи о распространении пассивной примеси в программном комплексе COMSOL использовались результаты предварительного

расчета гидродинамики потока методом установления. Стабилизация потока происходила около 2000 расчетных секунд и контролировалась по изменению со временем величины расхода жидкости через выходное сечение. Далее решалась задача массопереноса при вычисленных значениях скорости установившегося потока. В расчетах скорость потока на поверхности составляла до 0.35 м/с и предполагалось, что вещество не распадается. При численном решении концентрационной задачи в программном комплексе COMSOL наблюдались осцилляции концентрации, которые имеют вычислительную природу и связаны с размером конечноэлементной сетки, использованной в расчетах. При измельчении сетки подобные эффекты пропадают, что было подтверждено выборочным проведением вычислительных экспериментов.

Для численного решения начально-краевой задачи концентрационной подсистемы редуцированной модели в среде Matlab был реализован алгоритм, сочетающий метод Галеркина и сеточный метод характеристик. Численное интегрирование задачи Коши для системы 15 линейных уравнений гиперболического типа относительно галеркинских коэффициентов осуществлялось по неявной конечно-разностной схеме.

Представленные результаты численного моделирования позволяют утверждать, что редуцированная модель адекватно описывает как гидродинамику, так и перенос вещества в протяженном потоке со свободной границей. При этом редуцированные уравнения существенно проще исходных и позволяют оперативно проводить вычислительные эксперименты даже на компьютерах с ограниченными ресурсами.

Работа выполнена по АВП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 1.5.11 темплана ЮФУ).

## Идентификации характеристик интерфейсных слоев в армированных композитах

**Зиборов Е. Н.\***, **Напрасников В. В.\*\***

*\*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*

*\*\*Минск, Белорусский национальный технический университет*

*soloviev@math.rsu.ru*

Проблема расчета ресурса полимеркомпозитных лонжеронов лопастей вертолета, которые получают способом намотки стекловолокон в эпоксидном связующем с последующим термическим отверждением, связана как с изменением свойств матрицы за счет климатических воздействий, так и с изменением адгезии между армирующими нитями и матрицей. Последнее может быть описано в рамках модели некоторого интерфейсного слоя между ними, свойства которого заранее не известны. Построению моделей интерфейсного слоя между связующим и армирующей нитью посвящен ряд работ отечественных и зарубежных авторов. В данной работе предложен метод идентификации механических свойств интерфейсных слоев в армированных композитах на основе модели упругого



тела, т. е. проблема сводится к обратной коэффициентной задаче теории упругости. Предполагается, что механические свойства связующего и армирующего материалов известны, рассматривается представительный объем композита с интерфейсным слоем, представляющий собой трехслойный цилиндр, для которого строится аналитическое решение задач растяжения и кручения. Параметры механических свойств интерфейсного слоя выражаются через характеристики напряженно-деформированного состояния на границе тела, которые могут быть измерены в эксперименте (смещения, углы поворота, напряжения). В усложненной постановке задачи неизвестны как механические свойства интерфейсного слоя, так и его размеры, при этом проблема идентификации попадает в класс геометрических и коэффициентных задач теории упругости. Рассмотрены численные эксперименты, в которых процесс измерения деформационных характеристик заменен решением задачи с известными свойствами методом конечных элементов. Прделанные расчеты показали эффективность предложенного метода.

Авторы выражают благодарность А. Н. Соловьеву за внимание к работе.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 10-08-01296-а, 10-08-13300-РТ\_оми), ГК № П401, П487, П596 в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы.

## Изолированная дисклинация в нелинейно упругих оболочках вращения

**Зубов Л. М., Рыбченко А. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
q19683@rambler.ru

Некоторые особенности строения различных физических и биологических двумерных систем, имеющих форму замкнутых поверхностей, можно интерпретировать как дисклинации. Примерами таких систем могут служить фуллерены и оболочки сферических вирусов.

В докладе двумерные системы моделируются нелинейно упругой тонкой оболочкой, свойства которой определяются заданием удельной энергии деформации как функции метрических и изгибных мер деформации материальной поверхности. Дисклинация трактуется как дислокация Вольтерры с нулевым вектором Бюргерса. Если замкнутая оболочка вращения гомеоморфна сфере, то указанная дислокация Вольтерры равнозначна существованию двух клиновых дисклинаций, сосредоточенных в полюсах поверхности вращения.

Найдена подстановка в нелинейных уравнениях равновесия упругой оболочки, позволяющая свести исходную задачу к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Последняя интегрируется численным методом.

В мембранном приближении, т. е. в случае, когда толщина оболочки настолько мала, что можно пренебречь ее изгибной жесткостью, удастся найти точные решения задачи о дисклинации в сферической, эллипсоидальной и торообразной

оболочках, а также в незамкнутых оболочках, имеющих форму конуса и однополостного гиперboloида. Определена форма поверхности этих оболочек, возникающая после создания дисклинации.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы (госконтракт П596), а также при поддержке РФФИ (09-01-00459).

## О критических случаях устойчивости некосимметричных равновесий

**Иванова В. С., Куракин Л. Г.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
kurakin@math.rsu.ru

Непрерывное однопараметрическое семейство равновесий встречается в условиях общего положения в динамических системах с косимметрией [1, 2]. В невырожденном случае спектр устойчивости меняется вдоль такого семейства, но из-за неизолерованности равновесий обязательно содержит точку нуль. Равновесие семейства устойчиво, если весь его спектр устойчивости, кроме простого нулевого собственного значения, лежит внутри левой полуплоскости.

Устойчивость равновесия понимается как нейтральная устойчивость вдоль семейства равновесий и, одновременно, асимптотическая устойчивость в трансверсальных к нему направлениях.

Семейство равновесий в условиях общего положения разбивается на устойчивые и неустойчивые по линейному приближению дуги. Разделяющие их равновесия будем называть граничными.

Соседними могут оказаться не только устойчивая дуга с неустойчивой, но и две устойчивые или две неустойчивые дуги. Спектр устойчивости граничного равновесия расположен в замыкании левой полуплоскости, и его нейтральная часть, лежащая на мнимой оси, отлична от простого нулевого собственного значения. В задаче устойчивости такого равновесия имеет место критический случай, то есть линейного приближения недостаточно для ее решения.

Перемещаясь вдоль семейства некосимметричных равновесий, при переходе с устойчивой дуги на неустойчивую будем наблюдать как бы потерю устойчивости равновесием, точнее, изменение устойчивости, связанное с изменением параметра — дуги кривой равновесий. Она может быть мягкой или жесткой, как и в случае изолированного равновесия системы с параметром. Не приводя строгих определений, заметим, что мягкой (жесткой) она является, если соответствующее граничное равновесие устойчиво (неустойчиво). Уже это показывает, что полезно знать, устойчиво граничное равновесие или нет.

Наличие в системе с косимметрией граничного равновесия есть случай общего положения. Будем говорить, что некоторая ситуация (вырождение) имеет коразмерность 1, если она встречается неустранимым образом (сохраняется при малых гладких косимметричных возмущениях) в однопараметрических семействах косимметричных векторных полей.

В работах [3, 4] приведены критерии устойчивости граничного равновесия во всех критических случаях коразмерности 0 и 1. В данной работе приведены необходимые и достаточные условия устойчивости для ряда случаев коразмерности 2 и выше.

#### Литература

1. Юдович В. И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49, вып. 5. С. 142–148.
2. Yudovich V. I. Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it // Chaos. 1995. Vol. 5, No. 2. P. 402–411
3. Куракин Л. Г. Критические случаи устойчивости. Обращение теоремы о неявной функции для динамических систем с косимметрией // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 4. С. 572–578.
4. Куракин Л. Г. Об устойчивости граничных равновесий в системах с косимметрией // Сибирск. матем. журн. 2001. Т. 42, № 6. С. 1324–1334.

#### Экзотические компьютерные эксперименты в моделях экологии. Процедура «раскрашивания переменных»

**Ильичев В. Г.**

*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*  
vitaly369@yandex.ru

Для анализа сложных явлений требуется оценить влияние отдельных факторов на динамику экологической системы. Простейший подход заключается в вариации каждого фактора при фиксации остальных факторов. Тогда, однако, оценка влияния данного фактора будет зависеть от заданного уровня остальных. В ряде случаев можно использовать другой прием, основанный на так называемой процедуре «окрашивания факторов». Приведем два примера.

1. В результате модельных прогнозов установлено (Ф. А. Сурков): при сужении гирла Таганрогского залива (ТЗ) происходит его распреснение, а соленость остальной части Азовского моря (АМ) практически не изменяется. Чтобы выяснить причину этого неожиданного результата, будем считать, что основные элементы водного баланса — Дон, Кубань и Черное море — являются «окрашенными» в разные цвета: красный, зеленый и черный. Далее, с помощью долгосрочных расчетов (т. е. построения асимптотического режима) устанавливается доля элементов водного баланса для любого района Азовского моря. Так, обнаружено, что при сужении гирла доля речных (т. е. красных + зеленых) вод в ТЗ увеличивается, а в АМ она остается на прежнем уровне.

2. Экосистемы протяженных водохранилищ представляют собой каскад биоценозов. Под действием течения происходит перенос веществ и организмов

(т. е. водорослей) из верхнего участка (ВУ) в нижний (НУ). Предполагается, что воды мелкого ВУ быстро прогреваются в весенний период, поэтому его водоросли лучше адаптированы к высокой температуре, чем водоросли глубоководного НУ. Здесь возникает эколого-эволюционная задача об исходе конкуренции «аборигенов» и «пришельцев» на акватории НУ. Модельное решение заключается в том, что в начальный момент времени водоросли ВУ «окрашиваются» в красный цвет, а водоросли НУ «окрашиваются» в зеленый цвет. И далее, красные водоросли порождают красных, а зеленые водоросли производят зеленых. При долгосрочных расчетах (т. е. построении асимптотического режима) обнаружено, что в зависимости от скорости течения и характера температурного режима в нижнем участке могут возникать следующие ситуации.

- Все водоросли окрашены в зеленый цвет. Здесь в конкурентной борьбе аборигены вытеснили пришельцев.
- Все водоросли окрашены в красный цвет. Значит, победили пришельцы.
- Одна часть водорослей окрашена в зеленый, а другая часть окрашена красный цвет. Это соответствует сосуществованию аборигенов и пришельцев.

#### Идентификация параметров интерфейсной трещины в композитных материалах

**Кармазин А. В.\* , Кириллова Е. В.\* , Сыромятников П. В.\*\***

*\*Висбаден, Технический университет*

*\*\*Краснодар, Южный научный центр РАН*

*syromyatnikov@math.kubsu.ru*

В работе рассматривается двумерная модель многослойного упругого композита с трещиной, залегающей между слоями. В качестве алгоритмов решения прямой задачи используется моделирование многослойных сред в коммерческом пакете ABAQUS и численное решение граничных интегральных уравнений. Для исследования гармонических колебаний неограниченных по горизонтальной координате структур в пакете ABAQUS использован алгоритм введения поглощающей неотражающей границы [1]. Точность решения прямой задачи данным алгоритмом сравнивается с результатами, рассчитанными методом Галеркина [2], дифференциальной факторизации [3], блочного элемента [4]. Идентификация трещин осуществляется по изменению поверхностных перемещений — отклика материала на действие статической или гармонической нагрузки [5, 6]. Обратная задача формулируется как задача оптимизации для функционала невязки от функций, зависящих от параметров трещины. В качестве алгоритма решения задачи оптимизации использовались как методы случайного глобального поиска — генетические алгоритмы [5], так и методы глобального или локального поиска [7]. Исследовался выбор расположения и количества замеров, частоты колебаний для наилучшей сходимости решения обратной задачи, влияние уровня погрешности измеренных данных — перемещений, собственных частот и параметров материалов — на точность решения обратной задачи. Погрешность

в измерения вносилась при помощи генерирования случайных ошибок. Рассматривались вопросы регуляризации решения обратной задачи на основе дискретизации — выбора размеров элементов в конечноэлементной сетке, другие приемы регуляризации.

Приводятся примеры решения задач идентификации параметров трещины упомянутыми выше методами, сравниваются их достоинства и недостатки.

Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ и администрации Краснодарского края 09-08-96522-р-юг-а, 09-08-00294-а, программ отделения ЭМПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

#### Литература

1. Liu G. R., Quek Jerry S. S. A non-reflecting boundary for analyzing wave propagation using the finite element method // *Finite Elements in Analysis and Design*, 39, 403–417, 2003.
2. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Голуб М. В. Дифракция упругих волн на наклонной трещине в слое // *ПММ*, 2007, № 71, с. 643–654.
3. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Зарецкая М. В., Павлова А. В. Дифференциальный метод факторизации для блочной структуры // *ДАН*, 2009, Т. 424, № 1, с. 36–39.
4. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. О методе блочного элемента // *МТТ*, 2010, № 3, с. 155–163.
5. Liu G. R., Han X. *Computational Inverse Techniques in Nondestructive Evaluation* // CRC Press, 2003.
6. Ватульян А. О. *Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела*. М.: Физматлит, 2007, 223 с.
7. Gablonsky J. M. *DIRECT Version 2.0 User Guide*. Technical Report CRSC-TR01-08, Center for Research in Scientific Computation, North Carolina State University, April 2001.

#### Конечноэлементное моделирование сферического подшипника тележки электровоза

**Кармазин П. А.\* , Сухов Д. Ю.\*\* , Чебаков М. И.\*\***

*\*Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет путей сообщения*

*\*\*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикладной математики  
им. Воровича И. И.  
d.u.sukhov@gmail.com*

Для передачи усилий или сочленения различных объектов подвижного состава железнодорожного транспорта широко используются так называемые сферические подшипники скольжения. Такие подшипники обычно тяжело нагружены

и поэтому в процессе эксплуатации в местах подвижного контакта составных частей подшипника происходит значительный износ, что приводит к большим материальным затратам из-за частой замены узла, содержащего сферический подшипник. Для уменьшения трения и, соответственно, износа поверхностей трения в подшипнике в последнее время предлагается использовать вкладыши из полимерного антифрикционного материала, например, из полиамида.

Авторами была разработана схема расчета напряженно-деформированного состояния одного из вариантов сферического подшипника скольжения на базе конечноэлементного подхода с целью оптимального подбора механических параметров антифрикционных вкладышей.

В качестве расчетной модели рассматривался подшипниковый узел, который состоит из корпуса, шаровой опоры, шкворня, сферического антифрикционного вкладыша и цилиндрического антифрикционного вкладыша, всего — 4 контактные поверхности. Размеры компонентов выбирались таким образом, что на поверхностях сочленения деталей узла отсутствовали зазоры.

Основное внимание при расчетах уделялось исследованию контактных и эффективных (эквивалентных) напряжений на контактных поверхностях антифрикционных вкладышей при их взаимодействии с корпусом подшипника, сферическим шарниром и шкворнем в зависимости от упругих постоянных материала антифрикционных вкладышей. Была рассмотрена четвертьсимметричная постановка задачи.

Как показывают расчеты, максимальные эффективные напряжения на цилиндрическом вкладыше больше, чем на сферическом. Также, с увеличением жесткости вкладышей растут максимальные значения как эффективных, так контактных напряжений.

## Динамика атомно-силового микроскопа под действием теплового шума

**Карпинский Д. Н., Шишкин А. Н.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

karp@math.rsu.ru

В [1] выполнен расчет характеристик колебаний, вносимых тепловым шумом в малоамплитудный динамический режим микроконсоли атомно-силового микроскопа (ДАСМ). В этом расчете учтены влияние на вершину зонда внешних (линейных) сил, а также рассмотрена возможность использования ДАСМ в режиме, когда тепловые флуктуации микроконсоли выполняют роль внешней возмущающей силы.

В данном сообщении уточнены условия работы атомно-силового микроскопа, когда единственной возмущающей силой является тепловой шум. В [2] показано, что плотность теплового шума является важной характеристикой взаимодействия «тепловая баня» — система зонд–образец.

Плотность зависит от добротности и от диссипационных свойств системы. При увеличении добротности связывание тепловой бани и системы зонд–образец становится слабее. В [1] оценены среднеквадратичные перемещения микроконсоли ДАСМ и при этом расчеты не учитывали диссипационных свойств системы.

Учету влияния добротности микроконсоли ДАСМ на ее характеристики под действием теплового шума посвящена эта работа.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 10-08-00839-а.

#### Литература

1. Карпинский Д. Н., Шишкин А. Н. Оценка влияния теплового шума в малоамплитудных режимах атомно-силового микроскопа. // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки, 2010, № 5. С. 76–79.
2. Colchero J., Cuenca M., Gonzalez Martinez J. F., Abad J., Perez Garcia B., Palacios-Lidon E., Abellan J. Thermal frequency noise in dynamic scanning force microscopy. // J. Appl. Phys., 2011, V. 109. 024310.

#### Устойчивость упругой цилиндрической мембраны при растягивающих напряжениях

**Карякин Д. М.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
dmitry\_mechanic@mail.ru

В работе на основе мембранной теории нелинейно упругих оболочек исследована устойчивость тонкостенной цилиндрической трубы при раздувании и осевом растяжении. Выведены линеаризованные уравнения возмущенного равновесия и рассчитаны критические (бифуркационные) кривые в плоскости параметров нагружения. Обнаружено частичное совпадение области отсутствия выпуклости погонной потенциальной энергии и области устойчивости оболочки в плоскости параметров нагружения. Сравнение полученных результатов с результатами исследования устойчивости трубы в рамках трехмерной нелинейной теории упругости показало возможность применения мембранной теории к анализу устойчивости оболочек при растягивающих нагрузках.

#### Использование генетических алгоритмов в задаче оптимального проектирования профиля гофрированной мембраны

**Карякин М. И., Сигаева Т. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
menada@list.ru

Стремительное развитие биотехнологий сопровождается все более возрастающими требованиями к составляющим элементам самых разнообразных конструкций, примером которых и являются гофрированные мембраны, успешно

применяемые в имплантологии и хирургии, в инструментах измерения физиологических параметров тканевых и клеточных культур. И если еще несколько десятилетий назад инженеры могли справиться с задачами проектирования без непосредственного привлечения вычислительной техники на основе экспериментов и упрощенных моделей, то сегодня без ее использования невозможно адекватное прогнозирование поведения мембран со сложным профилем, работающих в условиях больших, в том числе закритических, деформаций.

Разумное гофрирование может существенно уменьшить напряжения в мембране и сделать ее более податливой для приложенного давления или, наоборот, обеспечить требуемую жесткость. Именно поэтому задача оптимального проектирования гофрировки мембран является одной из ключевых при их конструировании. В данной работе рассмотрена возможность применения генетических алгоритмов (ГА) для решения возникающих в данной связи проблем. При моделировании нелинейно упругого поведения осесимметричных мембран были использованы уравнения [1], основанные на гипотезах Кирхгофа-Лява и не накладывающие ограничения на пологость оболочек.

Были рассмотрены несколько «дизайнов» — функций профиля, описывающих зависимость возвышения точки срединной поверхности от радиуса мембраны. Каждый дизайн был представителем некоего вида гофрировки, созданного на основе определенной модификации сферического купола, конической мембраны и их объединения. Далее в каждом классе дизайнов с помощью механизмов наследования, мутации, инверсии и селекции ГА были найдены и проверены на устойчивость оптимальные формы гофрировки. В качестве критерия оптимальности выбиралось условие наличия у диаграммы нагружения мембраны максимально протяженного линейного участка малой пологости. На последнем этапе был проведен анализ чувствительности найденных форм к технологическим несовершенствам — неизбежным при конструировании отклонениям параметров дизайна от оптимальных значений. Проведенный анализ показал и пригодность полученных форм профилей, и эффективность применения ГА при их проектировании.

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 гг. (госконтракт ПЗ61).

#### Литература

1. Гетман И. П., Карякин М. И., Устинов Ю. А. Анализ нелинейного поведения круглых мембран с произвольным профилем по радиусу // ПММ. 2010. Т. 74, вып. 6, С. 917–927.



## Среда предоставления и контроля освоения учебных контентов по теоретической механике

**Карякин М. И., Соколова М. А., Хатламаджиян П. А., Шутько В. М.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
polina6787@gmail.com

Студенты, изучающие курс теоретической механики, регулярно проходят промежуточную аттестацию: в начале семестра они получают определенный набор заданий, которые необходимо выполнить и сдать в определенный преподавателем срок. Целью настоящей работы, реализующей систему предоставления и контроля выполнения индивидуальных заданий, является автоматизация этого процесса для облегчения труда преподавателя, который в ходе проверки работ из года в год выполняет одни и те же рутинные действия.

Система имеет два интерфейса: для преподавателя и для студента. Интерфейс преподавателя состоит из двух блоков. Блок «Банк заданий» предоставляет возможность пополнения и редактирования учебных контентов — индивидуальных заданий и методических указаний по их выполнению. Для каждого задания преподаватель задает точки контроля, количество допустимых ошибок при решении индивидуального задания, а также сроки выполнения и т. д. Блок «Мониторинг» предоставляет преподавателю всю информацию о текущей академической активности каждого студента.

В интерфейсе студента главным является блок «Проверка решения», цель которого — получить ответы (в т. ч. в формульном виде), сравнить их с правильными и принять решение о «зачете» работы. На первом этапе контроля решения проверяется ответ на все задание. Если представленный результат не верен, то задание делится на несколько подзадач, и студенту необходимо вводить ответ в каждой точке контроля. Такое разбиение процесса решения на этапы во многих случаях позволяет студенту самостоятельно локализовать и исправить ошибку. Это существенно уменьшает временные затраты на консультации как преподавателя, так и студента.

На настоящий момент в системе реализована поддержка заданий из раздела «Динамика» по темам «Исследование колебательного движения материальной точки», «Применение уравнений Лагранжа второго рода к исследованию движения механической системы с двумя степенями свободы», «Исследование малых свободных колебаний механической системы с одной и двумя степенями свободы».

Первое задание посвящено составлению и интегрированию дифференциального уравнения движения материальной точки. Из приведенных заданий оно является наиболее простым. Остальные задания можно отнести к группе заданий по аналитической механике, они требуют более глубокого знания теоретического материала, а также содержат элементы самостоятельного исследования. Самым трудоемким из них является работа на тему «Исследование малых свободных колебаний механической системы с двумя степенями свободы». В точках контроля от студента требуется определение кинетической и потенциальной

энергии, частот свободных колебаний, коэффициентов распределения и главных колебаний. Конечным результатом являются уравнения, определяющие закон изменения двух обобщенных параметров от времени в виде линейной комбинации тригонометрических функций.

Заметим, что даже в случае успешной «сдачи задания» компьютеру студент все равно представляет полный текст решения преподавателю. Окончательное решение о зачете задания принимается только преподавателем, возможно, после дополнительного обсуждения со студентом представленного текста.

## Об одной одномерной модели движения крови в крупных кровеносных сосудах

**Клевчишкина Н. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
sharethemoment@yandex.ru

В рамках одномерной модели изучен вопрос течения жидкости в упругой трубке. Учтена нелинейная упругость стенки кровеносного сосуда. Изучены стационарные решения, задача сведена к решению нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, описывающего возмущения радиуса стенки.

Показано, что решение этого уравнения выражается через эллиптические функции Якоби, порождающие солитон.

Проанализирована зависимость решения от параметров задачи, установлено, что могут иметь место два предельных случая, для которых решение выражается через элементарные функции.

Изучена зависимость решения от скорости волны; дан анализ нелинейных волн в длинноволновом приближении. Представлены соответствующие графические зависимости.

Проведен сравнительный анализ результатов линейной и нелинейной моделей, проанализировано влияние нелинейных слагаемых на характеристики волны.

Автор выражает благодарность Ватульяну А. О. за внимание к работе.

## Раздувание кривой трубы

**Колесников А. М.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
Alexei.M.Kolesnikov@gmail.com

В работе рассматривается раздувание оболочки, являющейся сектором тора, которую далее будем именовать кривой трубой. Кривизну центральной линии трубы будем называть кривизной трубы. Известно, что при раздувании кривой трубы происходит ее частичное распрямление. Целью работы является определение зависимости кривизны деформированной трубы от давления.

Задачу будем рассматривать в рамках нелинейной теории безмоментных оболочек. В работе [1] показано, что рассматриваемая задача является частным случаем задачи чистого изгиба кривой трубы. При чистом изгибе трубы деформацию можно разложить на две составляющие [2, 3]: деформацию поперечного сечения и поворот каждого сечения относительно другого на некоторый угол. Это позволяет свести двумерную задачу статики оболочки к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данном исследовании рассматриваются оболочки постоянной толщины, кругового поперечного сечения единичного радиуса, с начальной кривизной 0,05, 0,1 и 0,2. В качестве модели материала используются модель Муни-Ривлина и модель неогуковского материала. При анализе результатов будем рассматривать безразмерное давление и нормированную кривизну (кривизну деформированной трубы, отнесенную к начальной кривизне). Материал Муни-Ривлина является двухконстантной моделью. Неогуковский материал является частным случаем материала Муни-Ривлина и зависит только от одного параметра. Безразмерное давление есть давление, отнесенное к одному из параметров материала (который обычно называют «модулем сдвига»). Влияние второго безразмерного параметра на деформацию оболочки исследуется в данной работе.

Кривые «кривизна–давление» слабо зависят от начальной кривизны трубы (для исследованного диапазона начальных кривизн). При малых давлениях, когда нормированная кривизна более 0,85, второй параметр материала слабо влияет на зависимость «кривизна–давление». Дальнейшее увеличение давления и, как следствие, распрямление трубы повышает роль второго параметра материала.

Для всех рассмотренных случаев существует максимальное давление. Максимум давления слабо зависит от начальной кривизны (для рассмотренного диапазона) и близок к критической величине давления при раздувании цилиндрической оболочки (прямой трубы). Вторым параметром модели материала оказывает существенное влияние на величину максимального давления. Кривизна, соответствующая максимальному давлению, также зависит от этого материального параметра. Для неогуковского материала такая нормированная кривизна примерно равна 0,7.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президента Российской Федерации (грант МК-439.2011.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 гг. (госконтракт П596) и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 11-08-01152-а).

## Литература

1. Колесников А. М. Выпрямление высокоэластичной кривой трубы внутренним давлением // Тезисы докладов XIV международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», Т. 1, г. Ростов-на-Дону — Азов, 19–24 июня 2010 г. — С. 182–186.

2. Libai A., Simmonds J. G. Nonlinear theory of elastic shells. — 2nd ed. Cambridge. Cambridge University Press. — 1998.
3. Zubov L. M. Semi-inverse solution in non-linear theory of elastic shells // Archives of Mechanics. Vol. 53, (45). — 2001. — P. 599–610.

## Тонкостенная высокоэластичная трубка с жесткой цилиндрической вставкой

**Колесников А. М.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

Alexei.M.Kolesnikov@gmail.com

В длинную тонкостенную цилиндрическую оболочку вставлен цилиндр большего радиуса, необходимо определить напряженно-деформированное состояние оболочки в зависимости от размеров вставки.

При исследовании будем полагать, что оболочка является бесконечным цилиндром замкнутого поперечного сечения, материал оболочки высокоэластичный и несжимаемый, изгибная жесткость оболочки пренебрежимо мала, а вставка является абсолютно жестким цилиндром кругового поперечного сечения.

Из условий равновесия можно показать, что деформированную оболочку можно разделить на пять частей: соприкасающуюся с боковой поверхностью вставки, два плоских круговых кольца и две недеформированные части. Тогда из условий симметричности задачу можно свести к отысканию двух функций, определяющих деформацию оболочки на разных ее частях, и двух лагранжевых координат точек, являющихся границами между частями деформированной оболочки.

С использованием вариационного принципа минимума потенциальной энергии задача о равновесии сведена к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно двух неизвестных функций. Получены краевые условия для определения констант интегрирования и условия для нахождения двух неизвестных границ.

Для материала Бартенева-Хазановича задача может быть решена в квадратурах. Однако, данная модель материала имеет ограничения на величину деформации: радиус деформированной оболочки не может превышать трех начальных радиусов.

Длина вставки не оказывает влияния на напряжения, возникающие в оболочке. В работе построены и проанализированы зависимости между радиусом вставки и распределением усилий в оболочке (напряжений, осредненных по толщине). Получено, что начиная с некоторой величины радиуса вставки, дальнейшее его увеличение ведет к уменьшению усилий в оболочке. Также построены зависимости между параметрами жесткой вставки и лагранжевыми координатами точек, являющихся границами между частями деформированной оболочки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президента Российской Федерации (грант МК-439.2011.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры

инновационной России» на 2009 — 2013 гг. (госконтракт П596) и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 09-01-00459).

## Интегральные уравнения контактных задач для многослойных сред и методы их решения

**Колосова Е. М., Чебаков М. И.**

*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикладной математики*

*им. Воровича И. И.*

*chebakov@math.sfedu.ru*

Построены точные в явном аналитическом виде ядра интегральных уравнений для контактных задач теории упругости с учетом сил трения штампа и трехслойного основания, лежащего на жестком основании и упругом полупространстве. Предполагается, что слои жестко соединены между собой и с полупространством, а подошва штампа имеет форму параболы или плоская, в зоне контакта нормальные и касательные напряжения связаны законом Кулона, на штамп действуют нормальные и касательные усилия, при этом система «штамп — трехслойное основание» находится в условиях предельного равновесия и штамп в процессе деформации слоя не поворачивается. Изучены основные свойства ядер интегральных уравнений, в том числе показано, что числитель и знаменатель символов ядер могут быть представлены в виде разложения по произведениям степеней модулей сдвига слоев и полупространства, при этом выражения при этих произведениях содержат гиперболические и степенные функции от толщин и коэффициентов Пуассона слоев. Построены схемы решения интегральных уравнений с помощью асимптотических методов и прямого метода коллокаций. Асимптотические методы позволяют исследовать задачи для относительно малых или относительно больших толщин слоев, а предложенный алгоритм решения задачи методом коллокаций позволяет получать решение задачи практически при любых значениях исходных параметров. С помощью предложенных методов произведен расчет распределения контактных напряжений, размеров области контакта, взаимосвязи перемещения штампа и действующих на него сил, напряженно-деформируемого состояния во внутренних областях, особенно на границах раздела слоев с разными механическими параметрами в зависимости от геометрических и механических параметров слоев и коэффициента трения с целью их оптимального подбора для обеспечения необходимого ресурса работы моделируемых таким образом узлов трения. Проведено сравнение результатов расчетов, полученных этими методами, а также с результатами, полученными методом конечных элементов.

## Колебания физического маятника с многослойной идеальной жидкостью

**Кононов Ю. Н.**

*Донецк, Донецкий национальный университет*

*u.kononov@mail.donnu.edu.ua*

Физический маятник с полостью, частично заполненной жидкостью, является хорошей математической моделью для описания и исследования колебаний многих механических систем. Так, например, он находит применение в теории корабля, перевозящего жидкие грузы, при строительстве высотных сооружений как стабилизационный элемент для амортизации резонансных колебаний (Tuned Liquid Dampers или Active Liquid Dampers) и во мн. др. Однако в результате физических, химических, биологических и других воздействий однородная жидкость может стратифицироваться, т. е. разделяться на слои различной плотности, что приводит к увеличению степеней свободы системы, образованию внутренних волн, смещению центра тяжести и изменению моментов инерции механической системы. Таким образом, колебания физического маятника до стратификации могут быть устойчивыми, а после — стать неустойчивыми. В этой связи возникает задача о влиянии стратификации на динамику и устойчивость движения твердого тела и о возможности стабилизации неустойчивого движения твердого тела со стратифицированной жидкостью.

Одним из способов стабилизации неустойчивого движения твердого тела с жидкостью является ограничение подвижности свободной поверхности жидкости путем расположения на ней упругой мембраны или пластинки. Однако данная стабилизация для многослойной жидкости может оказаться недостаточной из-за наличия внутренних волн. В этой связи может быть поставлена и более общая задача о движении твердого тела с многослойной жидкостью, разделенной упругими пластинками. Эта задача имеет и самостоятельный научный и практический интерес, т. к. может быть использована при рассмотрении вопросов транспортировки жидких грузов в вертикальных отсеках с упругими днищами. Сформулированная задача требует совместного решения уравнений движения твердого тела, гидродинамики и теории упругости [1,2].

В линейной постановке рассмотрены плоские колебания физического маятника с полостью, частично заполненной многослойной идеальной несжимаемой жидкостью. В предположении естественной стратификации, т. е. когда более тяжелая жидкость находится ниже менее тяжелой, исследована структура спектра и получены условия устойчивости положения равновесия маятника. Показано, что стратификация приводит к уменьшению запаса устойчивости. Для стабилизации неустойчивого положения равновесия физического маятника с жидкостью, например, при нарушении естественной стратификации, вводятся упругие пластинки на свободную и внутренние поверхности многослойной жидкости. На основе модального анализа получены уравнения колебаний физического маятника с многослойной жидкостью, разделенной упругими пластинками, и условия устойчивости. Показано, что при помощи увеличения предварительного натяжения и изгибной жесткости всегда можно стабилизировать неустойчивое положение равновесия физического маятника с жидкостью [1,2].

## Литература

1. Кононов Ю. Н. Об устойчивости равновесия физического маятника, содержащего многослойную жидкость, разделенную упругими пластинками // Механика твердого тела. 2002. Вып. 32. С. 203–207.
2. Кононов Ю. Н. Об устойчивости движения твердого тела с упругими отсеками, содержащими жидкость // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. XII межд. конф., Ростов-на-Дону, 2008. Т. I. Изд-во «ЦВВР», 2008. С. 132–135.

## Реконструкция трещин в упругих телах с помощью искусственных нейронных сетей

**Краснощеков А. А., Соболев Б. В., Соловьев А. Н.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*

*soloviev@math.rsu.ru*

В данной работе описан метод идентификации трещиноподобных дефектов в заданном 3-хмерном объекте на основе искусственных нейронных сетей (ИНС). Предложенный метод охватывает полный цикл проектирования и построения ИНС: начиная с КЭ модели объекта, заканчивая схемой расположения датчиков на его поверхности и обученной нейронной сетью.

Для проведения экспериментов в пакете ANSYS была построена 3-хмерная модель балки прямоугольного сечения со сквозной трещиной, выходящей на верхнюю грань. Левый конец жестко зашпелен, правый — свободен. В результате пакетной обработки 980 различных случаев положений и размеров трещины получается и экспортируется спектр собственных частот и формы для каждого случая.

Основываясь на этих данных, строится обучающий набор для ИНС. При моделировании реальных условий возникает задача оптимального расположения датчиков на поверхности объекта, обработки и отображения их показаний во входные данные ИНС. При этом равномерное распределение датчиков на поверхности объекта может быть неоптимальным, поэтому, чтобы уменьшить вычислительную нагрузку, применяется генетический алгоритм (ГА) для размещения датчиков на объекте.

На завершающем этапе применяется нейронная сеть прямого распространения (feed-forward neural network). Эта архитектура полностью подходит для решения данной задачи и сочетает в себе простоту реализации и быстродействие.

В ходе исследования были изучены различные комбинации способов кодирования входных данных, методов обучения ИНС и количества ее слоев. Исследование показало, что подготовка входных данных является ключевым аспектом в решении задачи. Наиболее успешным оказалась идентификация дефекта на основании форм колебаний. При этом была достигнута точность в 99.16% в определении глубины и 99.82% в определении положения дефекта. Для этого

потребовалась информация о первых 5 формах, а при использовании только 3-х форм точность падает многократно.

ИНС, благодаря своим свойствам, позволяют проводить идентификацию на основе зашумленных данных, но для этого требуется более сложная архитектура сети.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 10-01-00194-а, 10-08-00839-а, 10-08-00093-а, 10-08-01296-а, 10-08-13300-РТ\_оми), ГК № П401, П487, П596 в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы.

## Моделирование миграции неантагонистических популяций на кольцевом ареале

**Кругликов М. Г., Цибулин В. Г.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
mkruglicov@gmail.com

Рассматривается система нелинейных параболических уравнений, моделирующая распространение неантагонистических популяций на кольцевом ареале с учетом неоднородности пространственного распределения видов и жизненных условий. Изменение плотности распределения каждой популяции  $w_i$  зависит от диффузии, направленного переноса и прироста, задаваемого законом типа логистического роста.

Эволюция плотностей распределения  $M$  популяций описывается системой уравнений

$$\dot{w}_i = k_i w_i'' + \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} w_j' + \eta_i w_i f, \quad i = 1, \dots, M, \quad (\cdot) = \partial_t(\cdot), \quad (\cdot)' = \partial_x(\cdot).$$

Здесь  $M$  — число популяций,  $t$  — время,  $x$  — пространственная переменная,  $k_i$  — коэффициенты диффузии,  $\eta_i$  — параметр роста. Члены  $\lambda_{ij} w_j'$  описывают миграционный перенос, возникающий из-за присутствия сторонних популяций. При этом возможна негативная (отток) и позитивная (приток) реакции. При выполнении соотношения  $k_2 \eta_1 = k_1 \eta_2$  система обладает линейной косимметрией и в ней появляется семейство стационарных распределений популяций. Рост популяции регулируется функцией

$$f = 1 - \sum_{j=1}^M w_j^2(x, t) / P^2(x),$$

где  $P(x)$  — предельная емкость, описывающая пространственную неоднородность жизненных условий.

На основе метода конечных разностей проведена серия экспериментов и изучено распределение неантагонистических популяций в кольцевом ареале с одной



благоприятной зоной обитания. Проанализировано влияние транспортных параметров и коэффициентов роста на сценарии взаимодействия популяций и формирования стационарных распределений.

## Анализ успешности обучения студентов 1 курса мехмата ЮФУ в свете современных тенденций в образовании

**Кряквин В. Д., Чернявская И. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

chernir@math.rsu.ru

С 2000-го года в Российской Федерации начался эксперимент по введению единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике. Эксперимент продолжался до 2007 года. С 2009 года ЕГЭ стал единым способом проверки знаний у выпускников школ и абитуриентов вузов.

До 2009 года большая часть абитуриентов мехмата проходила долгосрочную подготовку по математике в рамках «нулевого курса», во время которой преподаватели факультета в значительной степени поднимали уровень знаний абитуриентов, что позволяло последним быстрее адаптироваться на мехмате ЮФУ. За последние три года количество слушателей «нулевого курса» неуклонно снижается: фундаментальная подготовка по математике перестала быть востребованной, а подготовка к ЕГЭ в школах превратилась в «натаскивание» на типовых примерах из тестов. Студенты первого курса не имеют даже представления о том, что такое математическое доказательство, пока не столкнутся с необходимостью сдавать экзамены, поэтому результаты экзаменов для многих из них оказываются «шоком», пережив который (если это удастся), студенты приобретают опыт и, наконец, понимание того, что от них требуется. Этот тяжелый и для студентов, и для преподавателей процесс становится все более болезненным и длительным. Все сказанное наглядно иллюстрируется следующими таблицами:

Таб. 1. Успеваемость студентов 1-го курса в зимние сессии по специальностям:

специальность	03-04	04-05	05-06	06-07	07-08	08-09	09-10	10-11
Прикладная математика и информатика	63,5	57	66,4	73	57	49,59	46,51	34,31
Математика	49	29	51,4	29,5	39,3	34	34	23
Механика	33	46	64,7	42,8	26,9	29,3	23,8	20,7

Таб. 2. Результаты ЕГЭ и первой сессии в 10–11 уч. г.

Баллы ЕГЭ	100	81-73	71-69	66-63	62-56	55-45
% ст-тов с этими бал-лами	13	15	19	22	24	7
% успеваемости	77	53	37	52	22	29

Анализ показал:

- Процент потерь после первой сессии остается практически неизменным на благополучных отделениях, что свидетельствует о том, что это достаточно объективный показатель.

Из таб. 1:

- Однако на всех отделениях успеваемость в первую сессию резко снизилась за последние три года (поступают «жертвы ЕГЭ»). Это говорит о том, что все большая часть студентов первого курса не может усвоить необходимый материал, хотя после двухмесячного процесса пересдач, который фактически служит этапом «доучивания», большинство продолжают обучение. К сожалению, эти два месяца тянут за собой очередной провал в летнюю сессию.

Из таб. 2:

- ЕГЭ как форма проверки знаний достаточно объективна. Проблема в том, что обучение математике в школе превратилось в «тренинг к ГИА или к ЕГЭ», заменивший фундаментальную математическую подготовку.

В 2010–11 уч. году эти тенденции настолько обострились, что с необходимостью встал вопрос о пересмотре методики преподавания основных дисциплин.

Заметим, приведенная в таблицах информация отражает объективные тенденции хотя бы потому, что за указанный период состав преподавателей, работающих на первом курсе, практически не менялся, не менялись и программы курсов, составленные в соответствии с ГОСами 2-го поколения (2000–10 годы), разве что происходило снижение уровня требований, но это только усиливает негативную окраску указанных выше тенденций.

## О реализации mesh-free методов в двумерных задачах

**Кулешова В. В.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*

valentina\_rsu@mail.ru

В последнее время особое внимание уделяется разработке новых численных методов, призванных решать задачи сокращения времени на дискретизацию области на элементы, повышения эффективности моделирования полочки материала в большое количество фрагментов и исследования больших деформаций и областей с трещинами. Тем самым формируется новый, более сильный, класс методов, получивших название бессеточных, или mesh-free методов в более широком смысле, которые аппроксимируют уравнения в частных производных, основываясь только на наборе узлов, без знания дополнительной информации о структуре сетки.

Методы mesh-free применяются для задания системы алгебраических уравнений для всей области задачи без определения элемента. Бессеточные методы используют множество узлов, рассеянных в пределах области задачи, а также множество узлов, рассеянных на границах области, чтобы представить область

задачи и ее границы, но не дискретизировать ее. Эти множества рассеянных узлов не формируют сетку, не разбивают область на элементы, что означает, что не требуется никакой информации об отношениях между узлами, по крайней мере, в области изменяющейся интерполяции.

Характерными представителями бессеточных методов являются метод сглаженных частиц (SPH) и его модификация — полунявный метод движущихся частиц (MPS), метод лагранжево–эйлеровых частиц, представляющий собой некоторый специальный вариант метода Галеркина. Метод репродуцированных ядерных элементов (RKEM) также является улучшенной версией SPH. Численные методы SPH, MPS, а также метод интерполяции точки (PIM) активно применяются для моделирования задач гидродинамики с большими деформациями. Широко используемые методы, в том числе в механике твердого тела, — бессеточный метод Галеркина (EFG) и бессеточный локальный метод Петрова–Галеркина (MLPG).

Также разрабатываются вычислительные алгоритмы, объединяющие сеточный и бессеточный подходы и использующие преимущества каждой из методологий. К ним относятся, например, метод естественных соседей (NEM) и бессеточный метод конечных элементов (MFEM). Метод естественных соседей благодаря своей точности и устойчивости применяется в решении дифференциальных уравнений, в механике твердого тела, в теории упругости.

Также получили распространение методы разложения единицы (PUM, PUFEM, GFEM, XFEM), метод  $h_p$ -облаков, бессеточный метод наименьших квадратов (LSMM), метод локальных граничных интегральных уравнений (LBIE), метод конечных точек (FPM), метод конечных разностей с произвольными нерегулярными сетками и прочие.

Названия различных методов mesh-free все еще обсуждаются. Некоторые mesh-free методы объединены и названы meshless методами. Поскольку методология все еще находится в стадии быстрого развития, постоянно предлагаются новые названия методов, рассматриваются различные подходы к систематизации и классификации бессеточных методов.

В работе осуществлена реализация EFG метода для плоских задач изотропной теории упругости, проведены тестовые расчеты и сравнение результатов с конечноэлементным пакетом ACELAN.

Автор выражает благодарность А. Н. Соловьеву за внимание к работе.

## Литература

1. Liu G. R. Mesh free methods: moving beyond the finite element method. — CRC Press LLC, 2002.
2. Ferreira A. J. M., Kansa E. J., Fasshauer G. E., Leitão V. M. A. Progress on Meshless Methods // Computational Methods in Applied Sciences, Vol. 11. Springer, Berlin, 2009.
3. Youping Chen, James D. Lee, Azim Eskandarian. Meshless Methods in Solid Mechanics. — Springer, 2006.

## Асимптотический подход в задаче реконструкции трещины в вязкоупругом слое

**Лапина П. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*polina\_azarova86@mail.ru*

В работе представлено решение задачи об идентификации прямолинейной трещины малого размера в вязкоупругом ортотропном слое, жестко защемленном на основании, в рамках асимптотического приближения.

Трещина моделируется как математический разрез в области, на берегах которого компоненты полей перемещений терпят разрыв. Действие трещины на основе теории дислокаций заменяется действием фиктивных массовых сил с носителем на трещине. Берега трещины не взаимодействуют друг с другом во время колебаний и свободны от напряжений [1].

Вязкоупругие свойства материала учитываются на основе принципа соответствия. В случае стационарных гармонических колебаний решение задачи теории вязкоупругости получается путем решения аналогичной упругой задачи, в которой упругие константы материала заменяются на комплексные модули — функции частоты колебаний.

Расчет волновых полей в слое произведен на основе метода граничных интегральных уравнений с учетом малости относительного размера дефекта, аналогично [2], но для вязкоупругого материала. На основе формул Сомильяны построены интегральные представления полей перемещений и получены граничные интегральные уравнения относительно скачков перемещений на трещине.

Задача идентификации трещины в слое состоит в определении местоположения и геометрии трещины по амплитудам перемещений, измеренным на верхней границе слоя. Получены формулы для поэтапного определения параметров прямолинейной трещины: длины, угла наклона линии трещины к горизонтальной оси и координат середины трещины.

Численный анализ показал, что предложенный в работе асимптотический подход позволяет определять параметры прямолинейной трещины, длина которой не превышает 20% от толщины слоя.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы (госконтракт П596) и гранта РФФИ 10-01-00194.

### Литература

1. Ватульян А. О., Азарова П. А., Явруян О. В. Идентификация параметров наклонной прямолинейной трещины в вязкоупругом слое // Механика композиционных материалов и конструкций. 2008. Т. 14. № 3. С. 461–472.
2. Ватульян А. О., Явруян О. В. Асимптотический подход в задачах идентификации трещин // ПММ. 2006. №4. С.714–724.

## Интерпретация нехаусдорфовых приближений течения вязкой жидкости

**Ларченко В. В.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
lar@sfnedu.ru

Одна из современных абстрактных схем задания континуума основана на введении плотности вероятности, удовлетворяющей обобщенному кинетическому уравнению [1]. В приложениях его вид определяется содержанием задачи. В частности, если указан интеграл столкновения частиц, то их функция распределения  $f(t, x, v)$  по скоростям  $v$  и координатам  $x$  удовлетворяет эволюционному уравнению Больцмана.

В теории ансамблей Гиббса плотность вероятности  $\rho(t, x)$  есть искомая уравнения Лиувилля. Когда  $\rho(t, x)$  имеет предел  $\rho_0(x)$  по времени  $t, t \in [t_0, \infty)$ , например, в смысле Чезаро, и слабый предел по пространственным переменным, то этот факт интерпретируется как существование термодинамического равновесного состояния системы, характеризуемого феноменологическими переменными.

И в том, и в другом случаях величины, имеющие физический смысл, задаются осреднением с использованием  $f(t, x, v)$  и  $\rho_0(x)$ , причем их значения отождествляются со значениями соответствующих функций. Эти исследования ориентированы прежде всего на слабое взаимодействие в физической системе.

В [2] предложена альтернативная точка зрения относительно применения статистических методов механики. В ее рамках задаются вероятности  $p_{ij}$  реализации случайной величины  $(v^i, \nabla)v^j$ , где  $v^k$  — скорость на фактор множестве  $\mathcal{M}_k = \{x, y, z\}_k, (x, y, z)_k$  — декартовы координаты на  $\mathcal{M}_k$ . Для конвективного течения вязкой жидкости автором выведены уравнения. Если движение стационарное и плоское, а среда локально неоднородная, то краевая задача представима в виде:

$$\begin{aligned} (x, z) \in \Omega, \quad \lambda \Delta^2 \Psi^i + \beta_i \partial_x T &= \sum_{j=1}^n \langle p_{ij} \rangle [\langle \nabla \Psi^j \circ \Delta^+ \nabla \Psi^i \rangle + \\ &+ \langle \partial_{xz}^2 \Psi^{ij} \circ \Delta^- \Psi^{ij} \rangle], \quad \Delta T + \delta \eta(x)(1 - \text{sign}|\lambda - \lambda^*|) = \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \langle \nabla \Psi^j \circ T \rangle, \quad \int_0^{2\pi/l} \int_{-1}^1 \partial_x \Psi^i(x, z) dx dz = 0, \quad i \in N; \end{aligned} \quad (1)$$

$$x = \pm 1, \quad \partial_x \Psi^i = \partial_z \Psi^i = 0, \quad T = x\theta;$$

$$\Omega = (-1, 1) \times (-\infty, \infty), \quad \Delta^\pm(\cdot) = \partial_{xx}^2(\cdot) \pm \partial_{zz}^2(\cdot), \quad \delta \in (-r, r), \quad r \ll 1,$$

$$\Psi^{ij} \equiv \text{colon}(\Psi^i, \Psi^j), \quad \lambda, \beta_i, c_i, \theta \in R, \quad N = \{1, 2, \dots, n\}, \quad n < \infty.$$

Здесь  $\Psi_1, \Psi^2, \dots, \Psi^n, T$  — искомые функции;  $\beta_i, c_i, \langle p_{ij} \rangle$  — коэффициенты (скобки означают, что  $p_{ij}$  осреднены по времени  $t$ );  $\delta, \eta(x)$  — числовой и функциональный параметры;  $\{\lambda_k\}$  — последовательность собственных значений  $\lambda^* \equiv \{\lambda_k\}$ ;  $\langle (\cdot) \circ (\cdot) \rangle$  — скалярное произведение в двумерной симплектической геометрии.

Основное отличие уравнений (1) от системы Обербека-Буссинеска заключается в том, что они содержат целочисленный параметр  $n$ . Его смысл — количество топологически неотделимых точек, введенных при отказе от аксиомы Больцано [2]. Вычисление точек ветвления при  $n = 1, 2, \dots$ , отвечает их анализу на семействе алгебр. Интерес к постановке (1) обусловлен тем, что ее вывод в некотором смысле «следует» процедуре измерения поля скоростей и их градиентов. Если указанные величины осреднены в достаточно малой окрестности  $w \subset \Omega$  текущей точки  $\mathcal{A}$  до своих единственных значений, то, согласно (1), получим уравнение движения в форме Навье-Стокса. Пусть далее для простоты изложения выбраны две окрестности  $w_1 \subset w, w_2 \subset w$ , содержащие точки  $\mathcal{A}_1$  и  $\mathcal{A}_2$ , и измерены  $v^i = (v_x, v_z)^i, \beta_i, \nabla v_x^i, \Delta v_z^i, i = 1, 2$ . Затем повторными экспериментами установлены вероятности  $p_{ij}, i, j = 1, 2$ . Подстановка  $p_{ij}$  в (1) порождает уравнения в двух топологически неотделимых приближениях. Обратим внимание, окрестности  $w_1, w_2$  могут быть вложенными, а точки  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  — совпадать.

Автор предлагает методику эксперимента и обработку измерений проводить так, чтобы они отвечали течению вязкой жидкости на семействе алгебр. Для  $n = 2$  эта схема пояснена выше. Чтобы измерения не влияли на условия рождения вторичного течения, их необязательно проводить в окрестности точек ветвления. Принципиальный момент такой методики связан с тем, что здесь оценивается влияние разных схем осреднения на критические числа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 11-01-00147-а )

#### Литература

1. Козлов В. В. Обобщенное кинетическое уравнение Власова // УМН. 2008. Т. 63. Вып. 4(382). С.93–130.
2. Ларченко В. В. Закон Архимеда в условиях бифуркации решения и частичное осреднение феноменологических переменных // ЖВМ и МФ. 2011. Т. 51. № 4. С.708–722.

Применение пороупругих моделей с двойной пористостью для описания динамического напряженного состояния биологических тканей

**Лебедева А. А., Маслов Л. Б.**

*Иваново, Ивановский государственный энергетический университет  
maslov@tipm.ispu.ru*

Трубчатые кости скелета имеют две системы взаимосвязанных каналов. Большая из них состоит из гаверсовых и фолькманновых каналов диаметром около 50 мкм и содержит кровеносные сосуды и нервы. Меньшая система состоит из канальцев и лакун. Канальцы имеют на два порядка меньший размер

и содержат остециты. Имея сообщение с сосудистой системой, они образуют проход для питательных веществ и других клеток, поступающих к остецитам и от них. Когда кость подвергается нагрузкам, в жидкости внутри твердой основы возникает градиент давления, вызывающий ее движение. Считается, что потоки внеклеточной жидкости играют важную роль не только в питании клеток, но и в работе механочувствительной системы кости, регулирующей перестройку ткани в зависимости от внешнего силового поля [1]. Наличие двухмасштабной системы поровых каналов обуславливает необходимость разработки пороупругих моделей биологических тканей с более сложными внутренними свойствами. Разработан единый математический подход к описанию динамического напряженно-деформированного состояния механических структур из гетерогенных материалов, обладающих двойной связанной системой пор, заполненной флюидом. Получены новые уравнения, описывающие вынужденные колебания пороупругих тел с двойной системой пор. Использована модель анизотропной сплошной среды с дополнительными степенями свободы в материальной точке среды в виде парциальных давлений компонент жидкой фазы, находящихся в двух системах поровых каналов. Уравнения и способ их получения обладают большей степенью обобщения, чем встречающееся в литературе [2]. Для численного анализа применена формулировка метода конечных элементов в виде «перемещения упругого каркаса — давление в порах» и разработана конечноэлементная модель большеберцовой кости голени человека.

Результаты работы будут использованы для проведения вычислительных экспериментов по изучению амплитудно-частотных характеристик вынужденных колебаний модели кости и распределения давления в порах компактного и губчатого вещества в зависимости от частоты возбуждения и вида резонансных форм колебаний.

#### Литература

1. Wolff J. Das Gesetz der Transformation der Knochen. Berlin: A. Hirschwild (1892). Translated as: The Law of Bone Remodeling. Edited by P. Maquet and R. Furlong. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
2. Berryman J.G. Extension of poroelastic analysis to double-porosity materials: new technique in microgeomechanics // J. Eng. Mech. — 2002. — Vol. 128. — № 8. — P. 840–847.

#### Конечноэлементный анализ задач теории упругости для микрополярных сред

**Майорова О. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
o.a.mayorova@gmail.com

Механика обобщенных континуумов становится все более востребованной в последние годы, поскольку модели, построенные на ее основе, позволяют учитывать взаимодействия механических процессов различного пространственного

масштаба, присущие большинству природных и искусственных материалов и систем.

В рамках одного из таких обобщений — моментной теории упругости, или теории сред Коссера — частица материала рассматривается не как материальная точка, а как более сложный объект, наделенный дополнительными свойствами, описывающими микроструктуру материала. По мнению многих авторов, это, в частности, позволяет адекватнее анализировать задачи, в которых градиенты напряжений становятся значительными (а это является существенным при концентрации напряжений вокруг отверстий и трещин), в то время как классическая теория дает значительное расхождение между теорией и экспериментом. В то же время одной из известных проблем большинства теорий является вопрос надежного определения материальных параметров используемых моделей.

В настоящей работе представлены результаты конечноэлементного моделирования некоторых плоских задач о равновесии микрополярного упругого тела. В рамках линейной моментной теории упругости рассмотрены задачи об одноосном растяжении прямоугольного образца с отверстием, в окрестности которого возникает, как известно, существенная концентрация напряжений. Проанализировано влияние моментных констант модели среды Коссера на эту концентрацию. Построена зависимость концентрации напряжений вблизи кругового и эллиптического отверстий и от моментных констант, и от геометрии образца или отверстия. Расчеты проводились как для известных в литературе значений материальных параметров среды Коссера, так и для ряда модельных (гипотетических) наборов этих констант. Расчеты выполнены в среде конечноэлементного анализа FlexPDE.

Установлено, в частности, что влияние учета моментных напряжений на концентрацию напряжений не является однозначным: некоторым наборам материальных параметров среды Коссера соответствует существенное снижение концентрации, другим — заметное ее повышение.

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 гг. (госконтракт П361).

## О реконструкции трещин в слоистых композитах

**Макарчик Н. С., Спожакин А. С.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
soloviev@math.rsu.ru

Проблема регистрации и реконструкции поврежденного состояния конструкций играет важную роль в предотвращении аварийных ситуаций. Одним из шагов решения этой задачи является разработка математических методов этой идентификации. Математическими моделями в таких методах служат обратные задачи теории упругости, теплопроводности и т. п. В работе изучаются многослойные элементы конструкций, в которых возможно возникновение расслоений на интерфейсных границах или трещин, параллельных им.



В первом методе рассматриваются конструкции, которые находятся длительное время под действием динамических нагрузок, например гармонических. Такие воздействия приводят к разогреву материала, при этом области с трещинами являются зонами более интенсивного выделения тепла за счет концентрации напряжений либо деформаций или за счет взаимодействия берегов трещин. Поэтому рассматривается модель твердого теплопроводного тела и решается обратная задача реконструкции внутренних источников тепла. Дополнительной информацией для решения этой обратной задачи является температурный портрет, измеренный на поверхности тела. Реконструкция основана на применении теоремы взаимности для тела с источниками тепла и без них, причем для последнего строится набор пробных решений для слоистого тела. В результате получены точные формулы для определения глубины залегания дефекта и координат его внутренней точки. Проведены численные эксперименты, в которых процесс измерения температурного портрета заменялся численным решением задачи с помощью метода конечных элементов.

Второй метод применим в ситуации, когда берега трещин не взаимодействуют, и в качестве математической модели объекта рассматривается статическая краевая задача теории упругости. В качестве дополнительной информации для решения геометрической обратной задачи реконструкции трещин рассматривается поле смещений на свободной поверхности тела под действием некоторого набора статических нагрузок. Так же, как и в первом методе, применяется теорема взаимности для некоторого набора пробных решений для слоистого композита без дефектов и с повреждениями. В результате также получены точные формулы для определения глубины залегания дефекта и координат его внутренней точки, и аналогично проведены численные эксперименты, в которых процесс измерения поля смещений заменялся численным решением задачи. Проведенные численные эксперименты показали высокую точность разработанных методов.

Авторы выражают благодарность А. Н. Соловьеву за внимание к работе.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 10-08-01296-а, 10-08-13300-РТ\_оми), ГК № П401, П487, П596 в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы.

Исследования влияния турбулентного обмена и диффузии плотности на устойчивость внутренних волн в течениях с вертикальным сдвигом скорости

**Матишов Д. Г.\* , Соловьев А. Н.\*\* , Хартиев С. М.\*\*\***

*\*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*

*\*\*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*

*\*\*\*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*soloviev@math.rsu.ru*

На основе уравнений, широко используемых в физике моря, и аналогов уравнений Орра-Зоммерфельда, проведено исследование влияния турбулентной вязкости и диффузии плотности на устойчивость внутренних волн в непрерывно

стратифицированных плоскопараллельных течениях с вертикальным сдвигом плотности. Учет турбулентной вязкости и диффузии плотности позволяет, в отличие от критерия Майлса-Ховарда ( $Ri(z) > 0,25$ ;  $z \in [0; H]$ ,  $H$  — глубина моря), проанализировать устойчивость волновых возмущений во всем диапазоне изменения числа Ричардсона  $Ri(z) \in (-\infty; \infty)$ , включая случай плотностных инверсий (неустойчивой стратификации).

В результате проведенных исследований для различных режимов турбулентного движения получены аналитические оценки диапазонов длин устойчивых волновых возмущений, зависящие от угла набегания волны на поток соотношений коэффициентов турбулентной вязкости и диффузии плотности.

Численные расчеты выполнены для моделей устойчивой и неустойчивой стратификаций, а также в случае вертикальных профилей скорости течения и частоты Вайселя-Брента, характерных для экваториальной зоны Тихого океана.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГК № 14.740.11.0202 в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы.

### Особенности потери устойчивости трехслойных плит с пористой основой

**Михайлова И. Б., Соколов А. В., Шейдаков Д. Н.**

*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*

sheidakov@mail.ru

Настоящее исследование посвящено изучению устойчивости нелинейно упругих плит из высокопористых материалов, таких, как металлические и полимерные пены. Как правило, эти плиты имеют трехслойную структуру (пористая сердцевина покрыта твердой и жесткой оболочкой), что необходимо для защиты от коррозии, а также оптимизации механических свойств при нагружении. В подавляющем большинстве работ поведение пен изучается в рамках классической модели сплошной среды. Однако более целесообразным представляется использование модели микрополярной среды или континуума Коссера для изучения высокопористых материалов, так как это позволяет более точно описывать некоторые их особые свойства. Каждая частица континуума Коссера имеет дополнительную внутреннюю степень свободы — микровращение. В результате этого, деформация в моментной теории упругости описывается не одним, а двумя тензорами деформации, что существенно усложняет исследование поведения микрополярных тел.

В данной работе в рамках общей теории устойчивости трехмерных тел проведен анализ выпучивания круглой трехслойной плиты при радиальном сжатии, а также прямоугольной плиты при двухосном сжатии. Обе плиты состоят из металлической или полимерной пены, покрытой жесткой оболочкой. Поведение покрытия изучается в рамках классической (неполярной) модели сплошной среды, в то время как для описания свойств пористой основы применяется модель континуума Коссера. Используя метод линеаризации в малой окрестности

основного состояния, построены уравнения нейтрального равновесия для обоих типов плит. Путем их численного решения для ряда конкретных пористых материалов и покрытий найдены критические кривые и соответствующие им моды выпучивания, а также построены области устойчивости в плоскости параметров нагружения. Проанализирован размерный эффект и влияние свойств покрытия на потерю устойчивости упругих трехслойных плит с пористой основой.

Работа выполнена при поддержке Президента РФ (грант МК-6315.2010.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 11-08-01152-а), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы (госконтракт П596).

Об одной вычислительной схеме исследования равновесия  
и устойчивости нелинейно упругих куполообразных оболочек

**Мостипан Г. О.**

*Ростов-на-Дону, НИИ механики и прикладной математики  
им. Воровича И. И.  
gelterion@gmail.com*

Область применимости куполообразных конструкций чрезвычайно широка, именно поэтому разработке теории, созданию моделей таких объектов и их анализу посвящено большое количество работ. В то же время разработка эффективных вычислительных схем анализа устойчивости подобных конструкций, в том числе имеющих неканоническую геометрию, по-прежнему остается актуальной задачей. В настоящей работе рассмотрен один из подходов к ее анализу, базирующийся на определении точек бифуркации как таких значений параметра нагружения, при которых линеаризованная в окрестности некоторого решения изначально нелинейная краевая задача имеет нетривиальное решение.

Исходным этапом решения задачи устойчивости является построение того решения, устойчивость которого исследуется. В настоящей работе в качестве такового рассматривалось осесимметричное состояние оболочки, описываемое системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром, в качестве которого выступает внешнее гидростатическое давление. Именно решение этой системы при изменении давления в заданном диапазоне и позволяет построить так называемую «диаграмму нагружения» – график зависимости между приложенным давлением и какой-либо геометрической характеристикой деформации оболочки (например, прогибом в центральной точке или изменением объема под ее поверхностью). Численный анализ осуществлялся на основе метода пристрелки в сочетании с методом продолжения по параметру. Особенностью реализации данного метода является невозможность выбора только одного параметра продолжения на весь цикл построения диаграммы нагружения мембраны. Как известно, даже для «классической» задачи о нагружении сферического купола при определенной величине погиба возникает ситуация, когда между силовыми и деформационными характеристиками деформации отсутствует функциональная связь: диаграмма нагружения содержит петли, точки возврата, точки

самопересечения и т. п. В работе предложен подход, позволяющий на каждом шаге построения диаграммы автоматически выбирать подходящий параметр нагружения, так чтобы, с одной стороны, на его основе гарантированно можно было определить все остальные характеристики напряженно-деформированного состояния, а с другой — чтобы для используемого при поиске пристреливаемых параметров метода Ньютона автоматически подбиралось хорошее начальное приближение.

В работе приведены примеры расчета диаграмм нагружения для куполообразных оболочек сферического типа. Продемонстрированы коррективы и изменения, которые разработанный подход вносит в стандартную схему поиска точки потери устойчивости — критического параметра нагружения, связанные с тем, что физический смысл этого параметра не является фиксированным.

### Параметрическая модель вентилятора компрессорно-конденсаторного агрегата для исследования напряженного состояния при ударных воздействиях на основе командного файла ANSYS

**Напрасников В. В.\*, Скалиух А. С.\*\*, Якимуш И. С.\***

*\* Минск, Белорусский национальный технический университет*

*\*\* Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

N\_V\_V@tyt.by

Согласно ГОСТ РВ 20.39.304-98, проектируемая система, включающая в себя компрессорно-конденсаторный агрегат, должна выдерживать одиночные ударные нагрузки с пиковым ударным ускорением  $750 \text{ м/с}^2$  с длительностью действия ударного ускорения 1–5 мс.

Для проверки работоспособности проектируемого агрегата были решены следующие задачи:

1. разработана параметрическая трехмерная твердотельная модель вентилятора компрессорно-конденсаторного агрегата;
2. построена конечноэлементная модель для расчета напряженно-деформированного состояния вентилятора;
3. реализованы воздействия ударных нагрузок на конструкцию;
4. даны рекомендации по выбору оптимальной конструкции вентилятора компрессорно-конденсаторного агрегата по критерию минимума массы при выполнении ограничений для напряжений по Мизесу.

## Моделирование активных композиционных материалов и конечноэлементный анализ пьезоэлектрических устройств для биомедицинских применений

**Наседкин А. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
nasedkin@math.sfedu.ru

В последние годы существенно возрос интерес к исследованиям многофазных активных композиционных материалов (пьезоэлектрических, магнитоэлектрических, пироэлектрических, высокопористых активных материалов и т. п.). Данные материалы обладают эффективными свойствами преобразования энергий разного типа. Например, двухфазные магнитоэлектрические композиты состоят из пьезо- и магнитоактивной фаз и обладают способностью к взаимному преобразованию магнитного и электрического полей. К преимуществам этих материалов относятся высокая эффективность магнитоэлектрического преобразования, относительно высокие температуры фазовых переходов и большой технологический ресурс. Пористые пьезоэлектрические композитные керамики обладают рекордно высокой объемной пьезочувствительностью, низким акустическим импедансом и расширенной полосой пропускания частот.

Математические и компьютерные исследования активных композиционных материалов позволяют объяснить и промоделировать некоторые важные характеристики этих композитов и дать прогнозы по эффективности различных соотношений и связностей структур, составляющих фазы. В работе развивается подход, основанный на методах эффективных модулей механики композитов, на решении задач на ячейке (для периодических структур), компьютерном моделировании представительных объемов и на применении конечноэлементных технологий для активных композитов различной связности. Рассмотрены теоретические аспекты метода эффективных модулей применительно к активным многофазным композиционным материалам, сформулированы краевые задачи для представительных объемов, позволяющие находить эффективные модули неоднородных пьезоэлектрических и магнитоэлектрических композиционных материалов.

Полученные задачи механики активных композитов решались численно с использованием специально разработанных программ для конечноэлементного пакета ANSYS. По результатам расчетов было проанализировано влияние различных структур представительных объемов, ячеек периодичности и учета неоднородности полей поляризации на эффективные модули. Проведено сравнение вычисленных основных характеристик активных пьезокомпозитов с известными экспериментальными данными.

Во второй части работы рассмотрены вопросы конечноэлементного моделирования связанных физико-механических задач, включающих упругие, пьезоэлектрические и акустические среды, а также элементы внешних электрических цепей. Ряд таких задач представлял интерес для биомедицинских применений при использовании для возбуждения и регистрации акустических полей излучателей из активных материалов. При этом для моделирования устройств из актив-

ных композиционных материалов использовались разработанные методы расчета эффективных свойств композитов и техники связанного конечноэлементного анализа.

Работа выполнена в рамках тематики госконтракта П401 «Моделирование, дизайн и создание высокоэффективных пьезокомпозитов» ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы и проекта РФФИ 09-01-00875.

## Анализ связанности процессов фильтрации и деформации в моделях гидродинамического воздействия на угольные пласты

**Наседкина А. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
deviatorr@gmail.com

Рассмотрены фильтрационные и связанные пороупругие задачи для моделирования гидродинамического воздействия на угольный пласт с целью извлечения метана. Гидродинамическое воздействие осуществляется путем нагнетания в пласт жидкости под большим давлением через скважину, пробуренную с земной поверхности. Жидкость перемещается в режиме фильтрации вглубь пласта, сжимая метан в порах. Когда давление достигает давления гидроразрыва, метан высвобождается из связанного состояния и происходит газоотдача в зоне дегазации.

С позиции математического моделирования угольный пласт является двухфазной пористой средой, состоящей из твердой фазы скелета и жидкой фазы фильтрующегося в порах флюида. В общем случае предполагается связанный анализ твердой и жидкой фаз. В упрощенной постановке можно рассматривать только процесс фильтрации в предположении, что угольный пласт не деформируется. Процесс гидродинамического воздействия характеризуется нелинейной зависимостью коэффициента фильтрации от порового давления, что делает модель нелинейной.

В работе рассматриваются чисто фильтрационная задача для недеформируемой пористой среды, а также связанная и несвязанная задачи пороупругости в осесимметричной постановке. В качестве примера рассмотрен трехслойный угольный пласт Краснодонецкого месторождения Восточного Донбасса, состоящий из слоев угля, глинистого и песчанистого сланцев, имеющих различные фильтрационные и механические свойства. Численное решение поставленных нелинейных нестационарных задач фильтрации и пороупругости осуществляется методом конечных элементов в пакете ANSYS. Методика решения состоит в применении аналогии между уравнениями фильтрации и теплопроводности, а также поро- и термоупругости. Проводится обезразмеривание задачи для улучшения сходимости метода Ньютона-Рафсона решения систем нелинейных уравнений МКЭ на каждом временном слое.

Результаты расчетов позволяют оценить размер зоны дегазации на основе распределения порового давления в пласте. Сравнение результатов решения чисто фильтрационной, связанной и несвязанной задачи показало, что учет связанности процессов фильтрации и деформации в угольном пласте не оказывает заметного влияния на распределение порового давления для связанной и несвязанной задач пороупругости. В то же время, решения чисто фильтрационной задачи и несвязанной задачи пороупругости для порового давления отличаются достаточно сильно. Этот интересный факт объясняется существенным изменением эффективного значения обратного модуля Био при принятой гипотезе постоянства механических напряжений.

### О восстановлении неоднородного предварительного напряженного состояния в тонких пластинах

**Недин Р. Д.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
rdn90@bk.ru

В последнее время активно проводятся исследования, посвященные изучению напряжений, существующих в теле при отсутствии внешних воздействий, которые называют предварительными, начальными или остаточными. Поля предварительных напряжений в твердых телах обычно появляются в процессах технологических операций, таких как термообработка, сварка, закалка, прокатка, или же за счет начальных воздействий различного характера.

Весьма часто предварительное напряженное состояние неоднородно и зависит от координат, особенно в окрестности концентраторов. Возможность идентифицировать неоднородное предварительное напряженное состояние может быть использована в весьма востребованных технологиях неразрушающего контроля в авиа- и судостроении, строительстве, при изучении бетонов, композитов, при идентификации тканей в биомеханике.

Одним из наиболее эффективных неразрушающих методов оценки предварительного напряженного состояния является акустический метод. Решение задачи восстановления осуществляется на основе решения коэффициентной обратной задачи, что представляет собой нелинейную некорректную проблему.

В работе рассмотрены планарный и изгибный режимы стационарных колебаний упругой изотропной пластины, находящейся в условиях неоднородного предварительного напряженного состояния. С помощью вариационного принципа Лагранжа сформулирована слабая постановка задач. Проведен анализ влияния уровня предварительных напряжений на амплитудно-частотные характеристики пластины в обоих режимах колебаний. Решение прямой задачи реализовано с помощью метода конечных элементов в пакете FreeFem++. Адекватность полученных численных решений обеих задач была проверена путем сравнения этих решений в случае постоянного поля предварительных напряжений на стержневых моделях с аналитическими решениями аналогичных задач.

Рассмотрена обратная задача по идентификации неоднородного закона изменения одноосных предварительных напряжений. На основе метода линеаризации

обратная задача в обоих колебательных режимах сведена к итерационному процессу, на каждом шаге которого решается прямая задача и интегральное уравнение Фредгольма первого рода с непрерывным ядром относительно поправок к неизвестным функциям предварительных напряжений с помощью метода регуляризации А. Н. Тихонова.

В рамках обеих постановок была проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению одноосного неоднородного предварительного напряженного состояния в прямоугольных пластинах. Изучены различные случаи нагружения пластин. Представлены рекомендации по выбору предпочтительных режимов нагружения и частотных диапазонов зондирования, при которых восстановление искомой функции осуществляется наиболее точно.

Автор выражает благодарность Ватульяну А. О. за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ по проекту 10-01-00194 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы (госконтракт П596).

## Об одной коэффициентной обратной задаче термоупругости для стержня

**Нестеров С. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
1079@list.ru

Функционально-градиентные материалы, широко внедряемые сейчас в различные области техники, дают возможность оптимально проектировать конструкции, подвергающиеся термосиловым нагрузкам. При этом в термомеханических расчетах нужно учитывать существенную неоднородность таких материалов и связанность тепловых и механических полей. Прямые измерения модулей упругости и теплофизических коэффициентов в случае неоднородных тел невозможны. Поэтому для их нахождения необходимо решать коэффициентные обратные задачи термоупругости для неоднородных тел. В работе рассмотрен вопрос о восстановлении удельной теплоемкости неоднородного стержня при тепловом ударе на одном из его торцов в рамках модели линейной термоупругости. Задача приводится вначале к безразмерному виду, а затем рассматривается в трансформантах Лапласа в двух постановках. В первой постановке рассматривается слабосвязанная задача. На основе метода возмущений прямая задача для первой постановки сводится к последовательному решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно безразмерных трансформант температуры и смещений. Обратная задача решается в два этапа. На первом этапе находится начальное приближение в классе линейных функций. На втором этапе уточняется начальное приближение при помощи итерационного процесса, на каждом этапе которого необходимо решать интегральное уравнение Фредгольма первого рода, полученное методом линеаризации. Во второй постановке



восстанавливается удельная теплоемкость при произвольном параметре связанности. Прямая задача сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно безразмерных трансформант температуры и напряжений. Алгоритм решения обратной задачи аналогичен первой постановке. В работе натурный эксперимент заменен вычислительным. Все безразмерные коэффициенты при этом, кроме восстанавливаемой удельной теплоемкости, полагались равными единице. В ходе вычислительных экспериментов исследовалось влияние параметра связанности, шумов, монотонности функций на результат реконструкции. Выяснено, что в случае малости параметра связанности и в первой и во второй постановках хорошо восстанавливаются как монотонные, так и немонотонные функции. Когда связанность полей не мала, необходимо пользоваться только второй постановкой. При этом по мере увеличения параметра связанности результаты реконструкции незначительно ухудшаются, а наибольшая погрешность реконструкции наблюдается на торцах стержня. Задание значений коэффициента на торцах значительно уменьшало погрешность и в других точках. Результаты вычислительных экспериментов показали достаточную эффективность предложенного метода.

Автор выражает благодарность Ватульяну А. О. за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №10-01-00194-а)

## Конечноэлементное моделирование функционально градиентных материалов в ACELAN

**Оганесян П. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
soloviev@math.rsu.ru

Для моделирования пьезокомпозитов сложной структуры необходимо проводить предварительное численное моделирование. В данной работе рассматривается разработка модулей для программного комплекса ACELAN, предназначенных для решения прямых задач с учетом произвольных функциональных неоднородностей в пьезоматериалах.

Известно, что электроупругое тело в общем случае характеризуется набором упругих, электроупругих и диэлектрических коэффициентов, а также направлением вектора остаточной поляризации, который определяет ориентацию кристаллографической системы координат. Поэтому решатель предусматривает возможность задания функции, описывающей изменение любых коэффициентов в зависимости от положения точки в теле. Предусмотрено два вида учета поляризации — либо информация о том, как меняется вектор остаточной поляризации в зависимости от координат, либо рассмотрение угла между осями анизотропии, который позволяет получить направление поляризации. В первом случае может использоваться имеющийся модуль комплекса ACELAN для расчета поляризации. Для каждого тела в модели задается отдельный набор функций, описывающих его неоднородность.

Полученные модули позволяют, кроме явного задания функции изменения поляризации, воспользоваться восстановлением этой функции по значениям в дискретном наборе точек. Это может использоваться при изменении конечноэлементной сетки модели. Кроме того, этот подход позволяет восстанавливать функцию при наличии хотя бы нескольких точек, направление поляризации в которых известно, что позволяет проводить первичный анализ модели на основании малой входной информации. Восстановление функции производится при помощи реализованных в дополнительном модуле алгоритмов построения сплайнов — сплайн типа тонкой пластины и сплайн с заданной гладкостью, построенный по алгоритму Менге.

Поскольку все функции в данной реализации задаются дискретным набором коэффициентов, они могут быть легко использованы в качестве входных или выходных данных при решении обратных задач. В работе проводится численное моделирование тестовых двумерных задач и демонстрируется пример исследования эффективности пьезопреобразователя.

Автор выражает благодарность А. Н. Соловьеву за внимание к работе.

Данная работа была выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 10-08-01296-а, 10-08-13300-РТ\_оми), ГК № П401, П487, П596 в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы.

## Вынужденные внутренние волны в произвольно стратифицированном океане с учетом диссипации

**Ольшанская Е. В., Соловьева А. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный научный центр РАН*

*soloviev@math.rsu.ru*

Одной из причин возникновения внутренних волн служит переменное давление на поверхности океана. Рассматривается распространение вынужденных внутренних волн в плоском слое несжимаемой вязкой жидкости постоянной глубины под действием такого гармонического возмущения. Предполагается, что плотность, коэффициенты вертикального и горизонтального турбулентного обмена, а также горизонтальной диффузии плотности зависят только от вертикальной координаты. Линеаризованные уравнения движения и граничные условия сводятся к комплексной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка относительно амплитуды вертикальной скорости. Эта краевая задача сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно действительной и мнимой части амплитуды скорости. Особенностью рассматриваемой краевой задачи является наличие параметра при старших производных, который может принимать малые значения. В среде Maple разработана программа расчета амплитуд внутренних волн. С помощью этой программы проведены тестовые расчеты для различных законов стратификации плотности, коэффициентов турбулентного обмена и диффузии

плотности, выявлены значения параметров, при которых численное решение устойчиво. Проведены расчеты волновых полей для некоторых районов мирового океана, связанных с добычей и транспортировкой углеводородов.

Авторы выражают благодарность А. Н. Соловьеву и С. М. Хартиеву за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГК № 14.740.11.0202 в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы.

### Об обратных задачах при изгибных колебаниях балок

**Осипов А. В.**

*Ростов-на-Дону, Донской государственный технический университет*  
kukuvzz@yandex.ru

Задачи идентификации костной ткани представляют значительный интерес. В настоящей работе представлен способ идентификации неоднородной жесткости балки на основе измерения смещения в наборе точек. Разработан метод нахождения амплитудной характеристики для консольно закрепленной балки переменной жесткости на основе анализа интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Предложен метод определения закона изменения жесткости на основе решения задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению различных видов неоднородностей: монотонно возрастающая функция, монотонно убывающая функция, немонотонная функция, кусочно-разрывная функция. Проведено исследование точности реконструкции в зависимости от вида нагружения — сосредоточенная сила, сосредоточенный момент. Исследовано влияние аддитивного зашумления входных данных.

Автор выражает благодарность Ватульяну А. О. за внимание к работе.

### Некоторые задачи устойчивости цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией

**Панфилов И. А., Устинов Ю. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
mechanic\_rgu@mail.ru

Цилиндрические оболочки с винтовой анизотропией создаются, как правило, на основе волокнистых композитов с высокопрочными и жесткими армирующими элементами. Технологически это осуществляется путем намотки армирующих тонких нитей в виде спиралей с одновременным покрытием образующихся при намотке слоев полимерным связующим. После полимеризации получается твердый анизотропный материал, упругие постоянные которого определяются

на основе теории усреднения [1, 2] или экспериментально. Различаются два основных типа оболочек с винтовой анизотропией. К первому типу относятся спирально армированные оболочки, ко второму — биспирально армированные.

На пути создания таких материалов удастся решить ряд эксплуатационных проблем, одной из которых является соотношение веса, прочности и устойчивости конструкции.

В [3, 4] приведены результаты исследования устойчивости пологих спирально и биспирально армированных цилиндрических оболочек. В них, в частности, показано, что на величины критических нагрузок и формы потери устойчивости существенное влияние оказывает угол намотки армирующих волокон. Эти результаты получены интегрированием соответствующих уравнений прямыми методами (Бубнова–Галеркина, Треффца) в предположении, что основное напряженное состояние оболочки до потери устойчивости является безмоментным. Однако в [5] показано, что такой подход во многих случаях приводит к значительным погрешностям при определении критических значений внешних нагрузок, и поэтому при исследовании устойчивости следует рассматривать полную нелинейную постановку задачи.

Следует отметить, что для оболочек с винтовой анизотропией в окрестности точки бифуркации помимо осесимметричной формы появляется несимметричная и закритическое поведение оболочки, как правило, является неосесимметричным. Появление несимметричных форм потери устойчивости существенно усложняет задачу, поскольку изначально необходимо построить решение нелинейной осесимметричной задачи, которая, как правило, не имеет простых аналитических решений.

Настоящая работа посвящена исследованию устойчивости тонких цилиндрических оболочек с винтовой анизотропией на основании гипотез Кирхгофа–Лява. Получены нелинейные уравнения и разработаны алгоритмы определения критических нагрузок при внешнем гидростатическом давлении и при осевом сжатии. Для исследования влияния угла намотки на критические значения нагрузок проведена серия расчетов.

#### Литература

1. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 335 с.
2. Гетман И. П., Устинов Ю. А. О методах расчета канатов. Задача растяжения–кручения // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 81–90.
3. Нарусберг В. Л., Тетерс Г. А. Устойчивость и оптимизация оболочек из композитов. — Рига: Зинатне, 1988. — 299 с.
4. Бабич Д. В., Кошевой И. К. Устойчивость композитных оболочек с малыми искривлениями образующей. — Киев: ВИНТИ, 1986. С. 1–15.
5. Ворович И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 373 с.

## Анализ энергетических потерь пульсовой волны в области стеноза

**Поддубный А. А., Устинов Ю. А.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

lex\_rs@mail.ru

Исследуется распространение пульсовой волны в артериальном сосуде со стенозом. Стеноз моделируется сужением сосуда в виде цилиндрического отрезка конечной длины, форма пульсовой волны в виде систолы аппроксимируется отрезком ряда Фурье. В качестве характеристики сопротивления, порождаемого стенозом, исследуются величины потоков энергии отраженных и прошедших волн в зависимости от радиуса сужения и его длины. Исследуются также искажения формы исходной волны на различных участках сосуда.

## Составной нелинейно упругий цилиндр и его устойчивость под действием внешних нагрузок

**Попов А. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

a\_v\_popov@mail.ru

Изучается задача об устойчивости составной цилиндрической оболочки под действием внешнего равномерно распределенного давления. Рассматриваемая оболочка образована из двух полых круговых цилиндров, вставленных друг в друга. В исходном состоянии внутренний радиус внешнего цилиндра меньше внешнего радиуса внутреннего цилиндра. Вследствие этого в образованном составном теле возникают начальные напряжения. Необходимо определить влияние этих напряжений на величины критических значений внешнего равномерно распределенного давления. Для решения поставленной задачи применяется модель нелинейно упругого изотропного несжимаемого материала. Найдены уравнения нейтрального равновесия, линеаризованные граничные условия и условия сопряжения на границе между цилиндрами. Невозмущенное состояние равновесия определяется на основании точного решения нелинейной задачи Ламе для составного цилиндра. Задача устойчивости сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, численное решение которой дает возможность выяснить влияние начальных внутренних напряжений на величину критического давления, действующего на рассматриваемый цилиндр.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы (госконтракт П596).

## Моделирование вязкоупругого гистерезиса препаратов миокарда

**Проценко Ю. Л., Смолюк Л. Т.**

*Екатеринбург, Институт иммунологии и физиологии УрО РАН*

*fusion\_lab@pisem.net*

Известно, что в регуляции насосной функции сердца, помимо контрактильного аппарата, существенную роль играют вязкоупругие свойства миокарда. Вязкоупругий гистерезис является важной динамической характеристикой ткани сердца. Пассивное напряжение, обусловленное различными морфологическими структурами миокарда, является одним из факторов, определяющих скорость сокращения кардиомиоцитов. Основными источниками пассивного напряжения в миокарде являются кардиомиоциты и соединительнотканый каркас. Экспериментальные данные по вязкоупругому гистерезису позволяют оценить вязкость препаратов миокарда и диссипацию энергии при различных режимах нагружения.

В нашей работе проведен анализ экспериментальных данных по вязкоупругому гистерезису контрольных папиллярных мышц крысы и мышц после удаления кардиомиоцитов. Удаление кардиомиоцитов проведено с помощью 1% раствора додецил-сульфата натрия (SDS). Вид петли гистерезиса определяется уникальными вязкоупругими свойствами миокарда и носит нелинейный характер. Показано, что значения площадей петель гистерезиса препаратов контрольной группы при всех исследованных режимах нагрузок больше площадей петель гистерезиса SDS-группы. Кроме того, обращает на себя внимание различие на порядок площади петли гистерезиса контрольной группы и SDS-группы на длинах 1.18 L<sub>0</sub> и 1.08 L<sub>0</sub>. Для всех рассмотренных длин препаратов и периодов задания деформаций угол наклона петли гистерезиса препаратов контрольной группы больше угла наклона петли гистерезиса препаратов SDS-группы. Установлено, что децеллюляризация препарата приводит к значительному изменению реологических характеристик мышц. Показано, что при удалении кардиомиоцитов уменьшается и жесткость, и вязкость папиллярных мышц, а также уменьшается примерно в два раза площадь петли гистерезиса в цикле «растяжение — укорочение» мышц при рассмотренных режимах нагрузки. Это говорит о том, что ~ 50% потерь энергии в тепло в цикле «растяжение — сжатие» папиллярных мышц приходится на соединительнотканый каркас мышцы.

Разработана структурно-функциональная модель, описывающая вязкоупругое поведение изолированных папиллярных мышц. Показана возможность воспроизведения нелинейного вязкоупругого поведения изолированного препарата миокарда с помощью пространственной комбинации линейных упругих и вязких элементов, близкой по структуре к морфофункциональной единице миокарда — фасцикуле. В нашей модели отражен вклад основных морфологических структур миокарда — соединительнотканного каркаса и тайтина, обеспечивающих развитие пассивного напряжения в миокарде. Модель состоит из продольных и поперечных линейных упругих элементов, наклонных линейных вязкоупругих элементов и блоков, имитирующих тайтин. Предложенная модель адекватно воспроизводит экспериментальные данные по вязкоупругому гистерезису

папиллярных мышц при различных режимах нагрузки и в случае контрольного препарата, и в случае препарата после удаления кардиомиоцитов.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 10-04-00601-а.

## Распределение направления доменов сегнетоэлектрических керамик в электрических и механических полях

**Радченко М. Ю., Скалиух А. С.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
skaliukh@math.rsu.ru

Использование сегнетоэлектрических керамик в качестве наиболее перспективных в настоящее время активных материалов связано с детальным изучением их нелинейных свойств в сильных электрических и механических полях. Построение математических моделей механического и электрического отклика в таких средах в большой степени зависит от детального изучения механизма переключения электрических доменов. Последнее обстоятельство позволяет моделировать диэлектрические и деформационные петли гистерезиса, являющиеся одними из основных информационных источников, демонстрирующих физические свойства поликристаллических сегнетоэлектрических сред. В настоящей работе представлены исследования, связанные с переключением диполей в представительном объеме под действием одновременно приложенных электрических и механических полей, когда последние могут изменяться произвольно и независимо друг от друга для поликристаллических сегнетоэлектриков типа перовскита. В качестве условия переключения использовался один из энергетических критериев. Модель позволяет оценить, во-первых, какую часть спонтанной поляризации может достичь остаточная поляризация представительного объема в состоянии насыщения; во-вторых, определить угол конуса, в котором располагаются все векторы спонтанной поляризации. Модель является вспомогательной для построения функции плотности распределения доменов в случае действия и электрического поля, и механических напряжений.

## Использование модели SCORM при создании открытых информационно-образовательных ресурсов

**Русанова Я. М., Чердынцева М. И.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
micherd@yandex.ru

На сегодняшний день в сети Интернет существуют проекты, предоставляющие базы цифровых образовательных ресурсов. Кроме того, существуют готовые программные средства, позволяющие работать с цифровыми образовательными

ресурсами. В связи с этим представляется актуальным решение проблем унификации представления информационных ресурсов и межпрограммного взаимодействия. Одним из вариантов решения является предоставление средств создания так называемых дистрибутивных пакетов и средств для работы с ними.

В пакете должны содержаться электронные образовательные материалы и xml-файл формализованного описания содержимого (метаданные). Формализованное описание необходимо для поиска, выбора и получения представления о свойствах образовательного ресурса, его назначении и использовании. Формализованное описание основано на базе модели SCORM, которая предназначена для решения проблемы обмена цифровыми образовательными ресурсами и работы с ними в различных инструментальных средах.

Выбор модели SCORM обусловлен рядом причин. Сейчас модель SCORM де-факто стала стандартом (март 2009 — SCORM 2004 4th Edition). Использование SCORM экономит время и уменьшает затраты на разработку. Среди признанных преимуществ SCORM основным является совместимость компонентов цифровых ресурсов и возможность их многократного использования. Кроме того, SCORM обладает и рядом других преимуществ, например: возможность легкой адаптации образовательных ресурсов, простота реорганизации.

Использование стандарта SCORM является необходимым для обеспечения открытости создаваемых образовательных ресурсов. Стандарт позволяет объединять и комбинировать цифровые образовательные ресурсы различных разработчиков. Но как раз для решения именно таких проблем и предназначен стандарт SCORM. Его использование позволяет достаточно легко организовать обмен ЦОРами и модулями курсов, возможность быстрой модификации существующих курсов.

## Литература

1. Бушкова О. С., Русанова Я. М., Чердынцева М. И. Инструментальная среда для формирования электронных учебников, адаптированных к целям обучения // Сб. научных трудов «Математика. Компьютер. Образование», том 1. Москва — Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009, Стр. 166–174.
2. Старых В. А., Башмаков А. И. Принципы и технологические основы создания открытых информационно-образовательных сред. М., БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.

Идентификация параметров неоднородного по глубине слоя

**Сатуновский П. С.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

*gardsilver@list.ru*

В настоящей работе предложен новый метод решения важного класса одномерных обратных задач для слоистой среды, характеристики которой являются



функциями поперечной координаты. Подробно исследована задача об установившихся колебаниях неоднородного по толщине изотропного слоя с жестко закрепленным основанием под действием распределенной нагрузки на верхней границе в плоском и антиплоском напряженно-деформированном состоянии. Параметры Ляме и плотность слоя являются произвольными положительными кусочно-непрерывными функциями поперечной координаты. Представлены два класса задач: прямых и обратных. Первый класс задач сводится к задаче о построении полей перемещений на верхней границе слоя. Решением второго класса задач является определение законов неоднородностей в слое при заданных полях перемещений на верхней границе слоя.

Исследование прямых задач о расчете волновых полей на границе основано на преобразовании Фурье и предварительном сведении краевых задач к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода в пространстве трансформант. Разработаны методы построения дисперсионных множеств и полей смещений для вертикально неоднородного изотропного упругого слоя с произвольными законами неоднородности. Осуществлена численная проверка точности метода в случае однородного слоя и возможности построения аналитических выражений для дисперсионных множеств.

Для формулировки операторных уравнений для решения обратных задач использованы подходы, опирающиеся на теорему взаимности. На основе метода линеаризации в окрестности некоторого известного состояния осуществлено построение итерационных процессов для реконструкции законов неоднородности слоя. При этом на каждом шаге итерационного процесса необходимо решать систему интегральных уравнений Фредгольма первого рода с ядрами специального вида. Обращение таких операторов осуществлено на основе методов регуляризации, в частности, метода А. Н. Тихонова.

Разработаны пакеты прикладных программ для расчета дисперсионных соотношений и полей смещений на поверхности неоднородного слоя, а также для решения обратных задач. Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции различных законов неоднородности. Представлены результаты расчетов прямых задач для различных классов неоднородностей: линейных, монотонных и немонотонных законов.

Изгиб кольцевой пластинки, содержащей распределенные дисклинации кручения

**Столповский А. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

leva\_st@mail.ru

В рамках построенной ранее [1] теории пластинок с непрерывно распределенными дислокациями и дисклинациями рассматривается равновесие многосвязной пластинки, содержащей как изолированные, так и непрерывно распределенные дефекты. Представлено решение задачи об изгибе пластинки, имеющей форму кругового кольца, при наличии непрерывно распределенных дисклинаций

кручения. Получено аналитическое решение данной задачи в случае равномерно распределенных дисклинаций, а также решение в виде тригонометрических рядов для случая, когда функция плотности дисклинаций равна константе в пределах некоторой малой области, а вне ее тождественно равна нулю. Исследована зависимость энергии деформации, вызванной таким распределением дисклинаций, от положения центра области, содержащей дисклинации.

Дефекты типа дислокаций и дисклинаций играют значительную роль в механическом поведении различных двумерных физических систем, в том числе биологических мембран, поверхностных кристаллов, тонкопленочных наноструктур [2–3]

#### Литература

1. Зубов Л. М., Столповский А. В. Теория дислокаций и дисклинаций в упругих пластинках // ПММ. 2008. Том 72. Вып. 6. С. 997–1013.
2. Лихачев В. А., Хайров Р. Ю. Введение в теорию дисклинаций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1975. 183 с.
3. Гуткин М.Ю., Овидько И.А. Физическая механика деформируемых наноструктур. СПб. Т. 1. 2003. 192 с. Т. 2. 2005. 352 с.

#### Применение метода квазилинеаризации для идентификации нескольких параметров

**Сухов Д. Ю.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
d.u.sukhov@gmail.com

В представленной работе реализован метод одновременной идентификации двух и более параметров системы нелинейных дифференциальных уравнений. Метод построения итерационного процесса основан на идее квазилинеаризации и состоит в решении исходной системы уравнений с приближенными значениями искомых параметров и последующим уточнением их суперпозицией решений линеаризованной системы с начальными условиями специального вида. В ряде вычислительных экспериментов эта схема продемонстрировала достаточно быструю сходимость, обнаружив ряд преимуществ по сравнению с прямыми методами одновременной идентификации нескольких параметров из минимума целевой функции (генетические алгоритмы).

Представлены результаты идентификации параметров как хорошо известных нелинейных дифференциальных уравнений и систем, возникающих при математическом моделировании естественных процессов, так и параметров нелинейных дифференциальных уравнений специального вида, возникающих в задачах математического моделирования конструкций из нелинейно упругих материалов.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы (госконтракт П596).

## Моделирование конвективных движений в пористом кольце и расчет семейства стационарных режимов

**Трофимова А. В.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*

trofimova.anastasia@gmail.com

Анализ уравнений математической физики с сильной неединственностью решений представляет значительный интерес для развития теории и конструирования численных методов. Одной из таких задач является модель фильтрационной конвекции Дарси, для которой В. И. Юдович на основе теории косимметрии [1] объяснил нетривиальное рождение непрерывного семейства стационарных движений. Для решения нелинейных уравнений в частных производных необходимы численные методы, наследующие свойство косимметрии [2]. Соответствующие конечно-разностные дискретизации задачи Дарси в декартовых координатах были построены и позволили проанализировать развитие семейств стационарных режимов при больших надкритичностях для областей прямоугольного сечения.

В докладе проводится анализ режимов фильтрационной конвекции в кольцевых областях на основе конечно-разностной схемы, сохраняющей свойство косимметрии для уравнений в полярных координатах [3]. Для этого построены специальные аппроксимации нелинейных конвективных членов и членов, отвечающих силе всплытия. Задача фильтрационной конвекции в случае подогреваемого снизу кольца  $D = [R_1, R_2] \times [0, 2\pi]$  описывается системой безразмерных уравнений в полярных координатах  $(r, \varphi)$  относительно температуры  $\theta(r, \varphi, t)$  и функции тока  $\psi(r, \varphi, t)$ :

$$\begin{aligned} \partial_t \theta &= \Delta \theta + G(\psi) - J(\theta, \psi), \quad J(\theta, \psi) = \frac{1}{r} [\partial_r(\theta \partial_\varphi \psi) - \partial_\varphi(\theta \partial_r \psi)], \\ \Delta \psi &= \lambda G(\theta), \quad G(\theta) = \frac{1}{r} (\cos \varphi \partial_\varphi \theta + r \sin \varphi \partial_r \theta), \\ \theta|_{t=0} &= \theta^0(r, \varphi); \quad \theta|_{r=R_k} = 0, \quad \psi|_{r=R_k} = 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

В численном эксперименте исследовано ответвление семейств стационарных движений и проанализированы переходы, связанные с возникновением неустойчивости на семействах при росте фильтрационного числа Рэлея  $\lambda$ . В спектре каждого режима присутствует нулевое собственное значение, что соответствует нейтральному направлению вдоль кривой семейства, а неустойчивость определяется по спектру для трансверсального многообразия. Например, для кольца с  $R_1 = 1$  и  $R_2 = 2$  семейство устойчивых стационарных конвективных режимов ответвляется при  $\lambda \approx 41$ , а при  $\lambda \approx 60$  на семействе появляются участки неустойчивых стационарных режимов. В докладе приведены результаты расчетов, показывающих разрушение семейства стационарных решений при аппроксимациях, не обеспечивающих сохранение косимметрии исходной системы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-01-00708-а.

## Литература

1. Юдович В. И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции // Мат. заметки. 1991. Т. 49. вып. 5. С. 142–148.
2. Karasözen B., Tsybulin V. G. Finite-difference approximation and cosymmetry conservation in filtration convection problem // Phys. Let. A. 1999. V. 262. №. 4. P. 321–329.
3. Трофимова А. В., Цибулин В. Г. Расчет конвективных режимов в пористой трапециевидной области // Изв. ВУЗов. Сев-Кав. регион. Естеств. Науки. Спецвыпуск. 2009. С. 211–215.

## Прямая и обратная задачи о колебаниях поперечно-неоднородного слоя

**Углич П. С.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет  
puglich@inbox.ru*

Рассмотрена задача о колебаниях слоя с неоднородными механическими параметрами. При этом нижняя поверхность слоя жестко закреплена, а на верхней действует нагрузка. Рассмотрены случаи плоских и антиплоских колебаний.

В обоих случаях исходная задача после применения интегрального преобразования Фурье сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение краевых задач происходит численно с помощью метода пристрелки и таким образом находятся трансформанты перемещений и напряжений в слое. Также путем решения краевых задач при однородных краевых условиях найдены скорости бегущих волн в неоднородном слое и построены дисперсионные кривые. Затем путем численного обращения преобразования Фурье с учетом условий излучения найдены волновые поля на верхней поверхности слоя. Приводятся результаты расчетов.

Затем рассматривается обратная задача. В случае малых возмущений механических констант построены интегральные уравнения для определения законов распределения механических констант. В случае антиплоской задачи в качестве неизвестных констант выступают плотность и модуль сдвига слоя, в плоской задаче неизвестные — плотность и коэффициенты Ляме. Полученное уравнение решается при помощи метода регуляризации Тихонова. Приведены численные результаты.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы (госконтракт П596).

## Применение тестирующих программ в учебном процессе

**Усачева Т. В.**

*Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский Государственный Морской  
Технический Университет*

Usa444eva@mail.ru

Метод быстрой проверки качества усвоенного учебного материала — тест — известен давно. Но широкое применение этот метод получил при возникновении возможностей проведения тестирования с помощью компьютерных программ. Тестирование позволяет как проведение быстрого опроса каждого учащегося, так и возможность корректировки планов занятий на основании результатов тестов.

Однако важность тестирования часто связывают с формой этого метода контроля, особенно, если тест компьютерный. Качество самого теста уходит на второй план. Тем не менее, при разумном подходе к тестированию этот метод может быть достаточно полезным для контроля, диагностики, для корректировки учебных планов и прогнозирования результатов. Очень важным является создание тестов различных уровней. Например, при изучении математических дисциплин к первой, наиболее простой группе тестов следует отнести вопросы, проверяющие элементарные знания — формулы и значения величин в этих формулах. Следующая группа тестов — формулировки определений и теорем. Третья группа тестов — задачи, не требующие сложных вычислений, включающие в себя элемент сообразительности, заставляющие сопоставлять факты из различных разделов математики. Наконец, четвертая группа — вопросы, содержащие элементы исследования. Например, обосновать необходимость некоторого условия в формулировке теоремы. В некоторых тестах, как дополнительная трудность, полезно давать нестандартные постановки известных вопросов.

Следующий этап работы — обработка результатов. Полезно применять так называемое двойное тестирование, т. е. взаимная проверка учащимися результатов своих тестов. Важно так же выработать критерий прохождения теста и учета его результата на экзамене. Следует провести корреляцию между результатами тестов различных уровней и оценками на экзамене. В целом следует сказать, что применение тестирующих программ являются важным пунктом в современном учебном процессе при условии высокого качества тестов, обязательно включающих в себя вопросы, связанные с пониманием учебного материала, а не только с его заучиванием.

## Численно-аналитическое исследование устойчивости изгиба нелинейно упругой панели

**Шубчинская Н. Ю.**

*Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет*  
natfantasy2005@rambler.ru

Задачи о кручении, растяжении–сжатии и изгибе упругих тел имеют большое практическое значение, поскольку эти три вида деформаций являются основными типами деформирования самых разнообразных элементов конструкций. Испытания на изгиб и кручение используются для построения определяющих соотношений различных материалов в условиях больших деформаций. В данной работе в рамках плоской деформации была исследована задача об изгибе нелинейно упругой панели торцевыми моментами. Деформация в данном случае задается полубратным представлением

$$R = P(x), \quad \Phi = By, \quad Z = z, \quad (1)$$

описывающим превращение прямоугольного сечения панели  $-a/2 \leq x \leq a/2$ ,  $-l/2 \leq y \leq l/2$  в сектор кругового цилиндра  $P(-a/2) \leq R \leq P(a/2)$ ,  $-Bl/2 \leq \Phi \leq Bl/2$ . Здесь  $x, y, z$  и  $R, \Phi, Z$  — декартовы и цилиндрические координаты в отсчетной и актуальной конфигурации соответственно. Неизвестная функция  $P(x)$  определяет радиус точки в деформированном состоянии.

Для описания механических свойств материала панели были использованы две модели сжимаемых материалов: модель полулинейного материала и материала Блейтца и Ко. В случае гармонического материала краевая задача для определения  $P(x)$  линейна, что позволяет найти эту функцию в явном виде, в то время как для материала Блейтца и Ко краевая задача является существенно нелинейной, поэтому  $P(x)$  находилась численно. Установлено, что независимо от модели материала диаграмма изгиба (график зависимости изгибающего момента от угла раствора сектора деформированной панели) имеет точку максимума, за которой следует падающий участок. Это может свидетельствовать о неустойчивости панели при больших углах изгиба.

Для обеих моделей материалов получены уравнения нейтрального равновесия. Из анализа условия существования нетривиальных решений этих уравнений определяются критические значения углов изгиба панели, при которых возникают бифуркации равновесия.

Установлено, что для обеих моделей материала и для всех мод потери устойчивости на диаграмме изгиба существуют две точки бифуркации, причем первая соответствует кратному корню характеристического уравнения. Обе точки бифуркации расположены левее точки максимума на диаграмме изгиба.

Проведено исследование зависимости этих точек от размеров панели и материальных параметров моделей материалов. Численные эксперименты показали, в частности, что точки бифуркации по модам с номерами, большими единицы, лежат внутри отрезка, образованного точками бифуркации первой моды.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 гг. (госконтракт ПЗ61).

## Содержание

Абдель Латиф М. С. Численные исследования уединенных волн в наполненных жидкостью упругих трубках . . . . .	5
Абдель Латиф М. С. Симметричный анализ и некоторые новые точные решения уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами, возникающего в артериальной механике . . . . .	5
Аболмасов Д. С., Курбатова Н. В. Техники построения и оценки экспертных систем . . . . .	6
Абрамян А. К., Индейцев Д. А., Мочалова Ю. А., Семенов Б. Н. Локализация колебаний как причина отслоения пленки от упругого основания . . . . .	8
Айзикович С. М., Андреева З. В., Васильев А. С., Галыбин А. Н. Математическое моделирование задачи о кручении круговым штампом упругой среды сложной структуры . . . . .	8
Айзикович С. М., Андреева З. В., Волков С. С., Погоцкая И. В. Математическое моделирование осесимметричной контактной задачи о внедрении штампа в существенно мягкий слой, лежащий на упругом основании . . . . .	9
Айрапетян Г. С., Саркисян С. О. Математические модели микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких пластин . . . .	10
Акименко М. О. Статистический анализ динамики сердцебиения . . . .	11
Альтенбах Х., Еремеев В. А. Об устойчивости растущей пластинки . .	11
Аникина Т. А. Об определении переменной жесткости круглой пластины	12
Баранов И. В. Разработка генетических алгоритмов и искусственных нейронных сетей . . . . .	13
Батищев В. А. Квазистационарные спиральные течения жидкости в кровеносном сосуде . . . . .	14
Батищев В. А., Ломакин Н. Д. Длинноволновая асимптотика пульсовых волн в кровеносном сосуде . . . . .	15
Бауэр С. М., Качанов А. Б., Корников В. В. Аберрации высшего порядка при эмметропии и аномалиях рефракции . . . . .	15
Бекурин Д. Б., Кислухин Н. М., Марценюк М. А. Моделирование локомоций водных животных . . . . .	16
Бердышев Д. В., Гузев М. А. Двумерные модели реакции переноса протона в молекуле 2-ацетилциклопентан-1,3-диона . . . . .	17
Беркович В. Н. Особенности формирования волнового поля при установившихся колебаниях неоднородных сред клиновидного типа . .	18
Богачев И. В., Ватульян А. О. Идентификация вязкоупругих свойств мягких биологических тканей . . . . .	19
Будянский А. В., Цибулин В. Г. Моделирование конкуренции близкородственных популяций при наличии хищника . . . . .	20
Булыгин Ю. И., Корончик Д. А., Маслов Е. И., Месхи Б. Ч. Конечноэлементное моделирование процессов вентиляции производственных помещений . . . . .	21

Бурцева О. А., <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Кабельков А. Н.</span> , Казначеева О. К. Оптимальное оценивание напряженно-деформированного состояния и идентификация параметров наблюдаемых конструкций . . . . .	22
Бычков А. А. Расчет распределения Ge в поверхностных SiGe квантовых точках . . . . .	23
Ватульян А. О., Ляпин А. А. О моделях пороупругости и их приложениях к изучению свойств биологических тканей . . . . .	24
Ватульян К. А. Задача о кручении цилиндра с ромбоэдрической анизотропией . . . . .	25
Водолазская И. В., Исакова О. П., Тарасевич Ю. Ю. Процессы массопереноса в высыхающих каплях биологических жидкостей . . . . .	25
Гаврилов В. А., Кучумов А. Г., Самарцев В. А., Шумихина Т. В. Биомеханический подход к изучению функционирования билиарной системы в норме и при патологии . . . . .	26
Гатаулин Я. А., Смирнов Е. М., Юхнев А. Д. Численное моделирование закрученных течений в стенозированном кровеносном сосуде . . . . .	27
Герасименко Т. Е., Надолин Д. К., Надолин К. А., Цывенкова О. А. Перспективы внедрения образовательных инициатив Microsoft и Softline на мехмате ЮФУ . . . . .	28
Глазунова Л. В. Численно-математическая модель процесса охлаждения элементов радиоэлектронной аппаратуры . . . . .	29
Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Голуб М. В., Еремин А. А. Теоретические и экспериментальные исследования динамической реакции и волноводных свойств биологических и композитных материалов . . . . .	30
Григоренко К. С., Курбатова Н. В. Расчет стратификации плотности и скорости звука по данным океанографических атласов . . . . .	31
Григоренко К. С., Соловьева А. А., Хартиев С. М. Исследование квазипериодических нелинейных внутренних волн в непрерывно стратифицированном океане . . . . .	32
Денина О. В. Реконструкция малой полости в цилиндре . . . . .	33
Диденко А. В., Никитин Ю. Г., Сыромятников П. В. Моделирование напряженно-деформированного состояния геологических структур с разломами методами блочного элемента и дифференциальной факторизации. . . . .	34
Дударев В. В. К определению физических характеристик неоднородной пьезокерамики . . . . .	35
Елагин А. В., Сторожев В. И. Моделирование нелинейного ангармонического взаимодействия осесимметричных нормальных волн в упругом цилиндре . . . . .	36
Ерусалимский Я. М. Дискретная математика для биоинформатиков . . . . .	37
Ефременко О. Ю., Чумакова Е. С. Оптимизация модели пьезодвигателя на основе крутильных колебаний . . . . .	37
Жиляев И. В., Шевцова В. С., Шевцова М. С. Исследование численных методов оптимизации конструкций . . . . .	38



Жилияев И. В., Надолин К. А. Численное моделирование массопереноса в сверхмелком протяженном русловом потоке . . . . .	39
Зиборов Е. Н., Напрасников В. В. Идентификации характеристик интерфейсных слоев в армированных композитах . . . . .	40
Зубов Л. М., Рыбченко А. А. Изолированная дисклинация в нелинейно упругих оболочках вращения . . . . .	41
Иванова В. С., Куракин Л. Г. О критических случаях устойчивости некосимметричных равновесий . . . . .	42
Ильичев В. Г. Экзотические компьютерные эксперименты в моделях экологии. Процедура «раскрашивания переменных» . . . . .	43
Кармазин А. В., Кириллова Е. В., Сыромятников П. В. Идентификация параметров интерфейсной трещины в композитных материалах . . . . .	44
Кармазин П. А., Сухов Д. Ю., Чебаков М. И. Конечноэлементное моделирование сферического подшипника тележки электровоза . . . . .	45
Карпинский Д. Н., Шишкин А. Н. Динамика атомно-силового микроскопа под действием теплового шума . . . . .	46
Карякин Д. М. Устойчивость упругой цилиндрической мембраны при растягивающих напряжениях . . . . .	47
Карякин М. И., Сигаева Т. В. Использование генетических алгоритмов в задаче оптимального проектирования профиля гофрированной мембраны . . . . .	47
Карякин М. И., Соколова М. А., Хатламаджиян П. А., Шутько В. М. Среда предоставления и контроля освоения учебных контентов по теоретической механике . . . . .	49
Клевчишкина Н. В. Об одной одномерной модели движения крови в крупных кровеносных сосудах . . . . .	50
Колесников А. М. Раздувание кривой трубы . . . . .	50
Колесников А. М. Тонкостенная высокоэластичная трубка с жесткой цилиндрической вставкой . . . . .	52
Колосова Е. М., Чебаков М. И. Интегральные уравнения контактных задач для многослойных сред и методы их решения . . . . .	53
Кононов Ю. Н. Колебания физического маятника с многослойной идеальной жидкостью . . . . .	54
Краснощеков А. А., Соболев Б. В., Соловьев А. Н. Реконструкция трещин в упругих телах с помощью искусственных нейронных сетей . . . . .	55
Кругликов М. Г., Цибулин В. Г. Моделирование миграции неантагонистических популяций на кольцевом ареале . . . . .	56
Кряквин В. Д., Чернявская И. А. Анализ успешности обучения студентов 1 курса мехмата ЮФУ в свете современных тенденций в образовании . . . . .	57
Кулешова В. В. О реализации mesh-free методов в двумерных задачах . . . . .	58
Лапина П. А. Асимптотический подход в задаче реконструкции трещины в вязкоупругом слое . . . . .	60
Ларченко В. В. Интерпретация нехаусдорфовых приближений течения вязкой жидкости . . . . .	61

Лебедева А. А., Маслов Л. Б. Применение пороупругих моделей с двойной пористостью для описания динамического напряженного состояния биологических тканей . . . . .	62
Майорова О. А. Конечноэлементный анализ задач теории упругости для микрополярных сред . . . . .	63
Макарчик Н. С., Спожакин А. С. О реконструкции трещин в слоистых композитах . . . . .	64
Матишов Д. Г., Соловьев А. Н., Хартиев С. М. Исследования влияния турбулентного обмена и диффузии плотности на устойчивость внутренних волн в течениях с вертикальным сдвигом скорости . . . . .	65
Михайлова И. Б., Соколов А. В., Шейдаков Д. Н. Особенности потери устойчивости трехслойных плит с пористой основой . . . . .	66
Мостипан Г. О. Об одной вычислительной схеме исследования равновесия и устойчивости нелинейно упругих куполообразных оболочек . . . . .	67
Напрасников В. В., Скалиух А. С., Якимуш И. С. Параметрическая модель вентилятора компрессорно-конденсаторного агрегата для исследования напряженного состояния при ударных воздействиях на основе командного файла ANSYS . . . . .	68
Наседкин А. В. Моделирование активных композиционных материалов и конечноэлементный анализ пьезоэлектрических устройств для биомедицинских применений . . . . .	69
Наседкина А. А. Анализ связанности процессов фильтрации и деформации в моделях гидродинамического воздействия на угольные пласты . . . . .	70
Недин Р. Д. О восстановлении неоднородного предварительного напряженного состояния в тонких пластинах . . . . .	71
Нестеров С. А. Об одной коэффициентной обратной задаче термоупругости для стержня . . . . .	72
Оганесян П. А. Конечноэлементное моделирование функционально градиентных материалов в ACELAN . . . . .	73
Ольшанская Е. В., Соловьева А. А. Вынужденные внутренние волны в произвольно стратифицированном океане с учетом диссипации . . . . .	74
Осипов А. В. Об обратных задачах при изгибных колебаниях балок . . . . .	75
Панфилов И. А., Устинов Ю. А. Некоторые задачи устойчивости цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией . . . . .	75
Поддубный А. А., Устинов Ю. А. Анализ энергетических потерь пульсовой волны в области стеноза . . . . .	77
Попов А. В. Составной нелинейно упругий цилиндр и его устойчивость под действием внешних нагрузок . . . . .	77
Проценко Ю. Л., Смолюк Л. Т. Моделирование вязкоупругого гистерезиса препаратов миокарда . . . . .	78
Радченко М. Ю., Скалиух А. С. Распределение направления доменов сегнетоэлектрических керамик в электрических и механических полях . . . . .	79
Русанова Я. М., Чердынцева М. И. Использование модели SCORM при создании открытых информационно-образовательных ресурсов . . . . .	79

Сатуновский П. С. Идентификация параметров неоднородного по глубине слоя . . . . .	80
Столповский А. В. Изгиб кольцевой пластинки, содержащей распределенные дисклинации кручения . . . . .	81
Сухов Д. Ю. Применение метода квазилинеаризации для идентификации нескольких параметров . . . . .	82
Трофимова А. В. Моделирование конвективных движений в пористом кольце и расчет семейства стационарных режимов . . . . .	83
Углич П. С. Прямая и обратная задачи о колебаниях поперечно-неоднородного слоя . . . . .	84
Усачева Т. В. Применение тестирующих программ в учебном процессе . . . . .	85
Шубчинская Н. Ю. Численно-аналитическое исследование устойчивости изгиба нелинейно упругой панели . . . . .	86

Для заметок